

C. ANALYTICKÁ GEOMETRIE KUŽELOSEČEK

Kuželosečky — společný název pro *kružnici*, *elipsu*, *hyperbolu* a *parabolu*.

Lze je získat jako průniky rotačních kuželových ploch a rovin.

Kružnice, elipsa a hyperbola patří mezi tzv. *středové kuželosečky* — jsou souměrné podle svého středu. Parabola je (jediná) *nestředová kuželosečka*.

1. Kružnice

Definice. **Kružnice** je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu (tzv. **středu kružnice**).

Tedy, je-li dána kružnice $k(S, r)$, $S = [m, n]$, pak pro libovolný bod $X = [x, y]$ v rovině platí:

$$X \in k \iff |SX| = r \iff \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} = r \quad (1)$$

Bod $X = [x, y]$ bude tedy ležet na dané kružnici k právě tehdy, pokud bude platit

$$\sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} = r$$

nebo-li

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Definice. Necht $k(S, r)$, $S = [m, n]$, je libovolná kružnice. Rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

se nazývá **středová rovnice kružnice**.

Poznámka.

1. Výše uvedená rovnice kružnice se nazývá *středová* zřejmě proto, že z ní lze jednoduše zjistit souřadnice středu kružnice (a také poloměr kružnice).
2. Uvědomte si, že z (3) bezprostředně plyne, že bod $X = [x, y]$ leží na dané kružnici k **právě tehdy** když platí: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, tj. pokud tato rovnice neplatí, pak nemůže bod X na kružnici k ležet.

Příklad 1. Napište rovnici kružnice k se středem $S = [\sqrt{2}, -1]$ a poloměrem $r = \sqrt{3}$. Zjistěte dále, zda na ní leží bod $A = [2\sqrt{2}, 0]$.

[Řešení: $k: (x - \sqrt{2})^2 + (y + 1)^2 = 3$.

Zjistíme dále, zda $A \in k$. Bude to právě tehdy, pokud bude platit:

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (0 + 1)^2 = 3$$

Jednoduchým propočtem zjistíme, že uvedená rovnost je platná, tj. bod A na kružnici k leží.]

Vezememe-li středovou rovnici kružnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

umocníme levou stranu a upravíme, dostaneme rovnici

$$x^2 + y^2 + (-2m) \cdot x + (-2n) \cdot y + (m^2 + n^2 - r^2) = 0,$$

kterou lze psát ve tvaru

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

kde $C, D, E \in \mathbb{R}$ (nějaká konkrétní čísla).

Definice. Rovnice

$$x^2 + y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0 \quad C, D, E \in \mathbb{R}$$

se nazývá **obecná rovnice kružnice**.

Je důležité se naučit mechanismus „přechodu“ mezi středovou rovnicí kružnice a obecnou rovnicí kružnice. Převod středové rovnice na obecnou je jednoduchý: stačí středovou rovnici algebraicky upravit. Mírně složitější je opačný převod, při kterém využijeme metody doplnění na čtverec.

Příklad 2. Najděte střed a poloměr kružnice dané rovnicí

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$$

[Řešení: Postupně upravujeme:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 8y &= -1 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= -1 + 4 + 16 = 19 \\ (x + 2)^2 + (y - 4)^2 &= 19 \end{aligned}$$

$$\text{Tj.: } S = [-2, 4], r = \sqrt{19}.$$

Položme si opačnou otázku: *Je každá rovnice tvaru*

$$x^2 + y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0,$$

kde $C, D, E \in \mathbb{R}$ rovnicí některé kružnice? Odpověď je zřejmě záporná. Určitě rovnice $x^2 + y^2 + 1 = 0$ neplatí pro žádná $x, y \in \mathbb{R}$ a tudíž nemůže vyjadřovat ani žádnou kružnici.

Příklad 3. Rozhodněte, zda rovnice $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$ je rovnicí některé kružnice.

[Řešení: stačí obecnou rovnici postupně upravovat stejně, jako při převodu na středový tvar:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 &= -7 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= -7 + 4 = -3 \\ (x - 2)^2 + y^2 &= -3 \end{aligned}$$

Poněvadž je však $r^2 < 0$, nemůže být zadaná rovnice rovnicí kružnice.]

Příklad 4. Pro které hodnoty p je rovnice

$$x^2 + y^2 + 3x - y + p = 0$$

rovnicí kružnice? Určete pak souřadnice středu a její poloměr.

$$[\text{Pro } p < \frac{5}{2}; S = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}], r = \sqrt{-p + \frac{5}{2}}]$$

Příklad 5. V rovině jsou dány body $A = [2, -1]$, $B = [-2, 3]$. Určete množinu všech bodů X v rovině, pro které jsou přímky AX a BX navzájem kolmé.

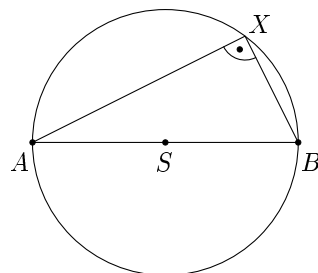
[Řešení: provedeme dvěma způsoby:

I. „geometrické“ řešení: z našich dosavadních dlouholetých geometrických studií bychom měli vědět, že řešením je Thaletova kružnice nad úsečkou AB . Tj. střed hledané kružnice bude ve středu úsečky AB a délka úsečky AB bude průměrem hledané kružnice. Výpočtem zjistíme, že hledanou množinou bodů je kružnice k , která má rovnici:

$$k: x^2 + (y - 1)^2 = 8$$

neboli^a

$$k: x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$$



^aObecně známe dva tvary rovnice kružnice: *středovou* a *obecnou*. Pokud v zadání není řečeno, jaký tvar máme uvést, je to úplně jedno.

II. „analytické“ řešení: Označme $X = [x, y]$ hledané body. Ze zadání má platit:

$$AX \perp BX \implies \mathbf{AX} \perp \mathbf{BX} \implies \mathbf{AX} \cdot \mathbf{BX} = 0$$

Dále platí: $\mathbf{AX} = (x - 2, y + 1)$, $\mathbf{BX} = (x + 2, y - 3)$, tj. musí platit:

$$(x - 2) \cdot (x + 2) + (y + 1) \cdot (y - 3) = 0$$

$$x^2 - 4 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$$

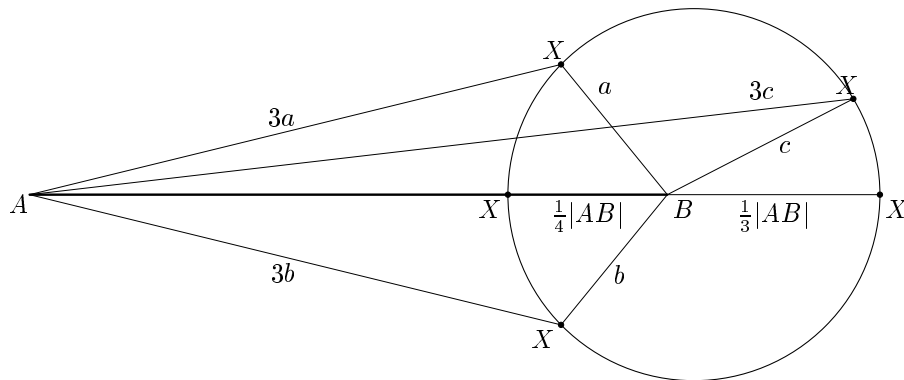
Tj. hledanou množinou všech bodů X je kružnice k , která má (obecnou) rovnici:

$$k: x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0 \quad]$$

Příklad 6. Určete množinu všech bodů roviny, které mají od bodu $A = [1, -2]$ třikrát větší vzdálenost než od bodu $B = [-3, 6]$

[Řešení: Označme nejprve souřadnice hledaného bodu $X = [x, y]$. Podle zadání musí platit (můžeme se podívat na obrázek):

$$|AX| = 3 \cdot |BX|$$



Pokud si to rozepíšeme a upravíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} |AX| &= 3 \cdot |BX| \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} &= 3 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + (y-6)^2} \\ &\vdots \\ x^2 + 7x + y^2 - 14y &= -50 \\ &\vdots \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-7)^2 &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

Zjišťujeme tedy, že hledanou množinou všech bodů je kružnice se středem $S = [-\frac{7}{2}, 7]$ a poloměrem $r = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Poznámka. Pokud předchozí příklad zobecníme, platí: jsou-li dány dva různé body A, B , pak množinou všech bodů X roviny, pro které platí $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ ($\implies |AX| = k \cdot |BX|$) je pro:

- $k = 1$ osa úsečky AB
- $k \neq 1, k \in \mathbb{R}^+$ kružnice; tzv. *Apolloniova kružnice*¹

¹Apollonios z Pergy (asi 200 l př.n.l.) — významný řecký matematik

Další, takovou typickou úlohou, je napsat rovnici kružnice procházející třemi body. Víme, že každými třemi body, které neleží na jedné přímce, prochází jednoznačně určená přímka (kružnice opasaná trojúhelníku určeného danými body). To, že k jednoznačnému zadání kružnice stačí **tři** body², můžeme vysledovat také z obecné rovnice kružnice. V této rovnici platí: abychom určili *konkrétní* kružnici, musíme nalézt tři koeficienty C , D , E ³. Tj. musíme najít tři koeficienty, které nalezneme pomocí tří bodů.

Příklad 7. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [2, 1]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, 5]$.

[Ř.: do obecné rovnice kružnice $k: x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ dosadíme postupně souřadnice bodů A , B , C (poněvadž tyto body leží na kružnici k , musí tedy jejich souřadnice vyhovovat rovnici kružnice k). Dostaneme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých C , D , E :

$$\begin{aligned} 5 + 2C + D + E &= 0 \\ 9 + 3C + \quad + E &= 0 \\ 25 + \quad + 5D + E &= 0 \end{aligned}$$

jejíž řešení je $C = -18$, $D = -14$, $E = 45$. Hledaná kružnice má rovnici:

$$k: x^2 + y^2 - 18x - 14y + 45 = 0 \quad .]$$

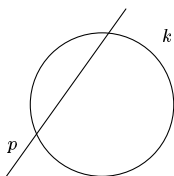
Kružnice a přímka

Vzájemnou polohou přímky a kružnice jste se již zabývali před mnohými léty. Moc dobře víme, že jsou tři možnosti — přímka p má s kružnicí k

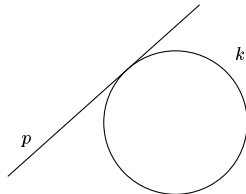
dva společné body

jeden společný bod

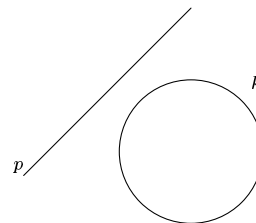
žádný společný bod



přímka p je **sečna** kružnice k



přímka p je **tečna** kružnice k



přímka p je **vnější přímkou** kružnice k

Zjistit, jakou vzájemnou polohu má kružnice a přímka, znamená vlastně zjistit, kolik mají společných bodů, což vede na řešení soustav rovnic.

Příklad.

- Určete vzájemnou polohu přímky $p: 2x - y - 8 = 0$ a kružnice $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. [přímka p je sečnou kružnice k , apolečné body: $P_1 = [2, -4]$, $P_2 = [\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}]$]
- Určete vzájemnou polohu kružnice dané rovnicí $k: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ a přímky $p: y = x + c$ v závislosti na hodnotě parametru $c \in \mathbb{R}$.
 $[p \text{ je sečna} \iff c \in (-4 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2})$; $p \text{ je tečna} \iff c \in \{-4 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2}\}$; $p \text{ je vnější přímkou} \iff c \in (-\infty, -4 - \sqrt{2}) \cup (-4 + \sqrt{2}, +\infty)$]

Nyní se budeme zabývat (pro geometrii) jednou typickou úlohou: *konstrukcí tečny ke kružnici*. Nejprve se věnujme konstrukci tečny procházející daným bodem, který na kružnici leží. Podotkněme, že se budeme zabývat nikoli konstrukčním, nýbrž *analytickým* řešením⁴.

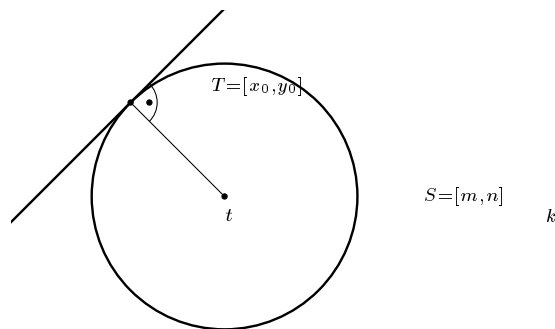
Příklad 10. Je dána kružnice $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a její bod $T = [x_0, y_0]$. Napište rovnici tečny této kružnice v bodě dotyku T .

[Řešení:

²neležící na jedné přímce

³znovu zdůrazníme, že nemůžeme zvolit „za koeficienty“ libovolná tři čísla C , D , E . Ne vždy se bude jednat o kružnici. Ale v našem případě diskutujeme *počet* koeficientů.

⁴konstrukční řešení je triviální a naučili jste se ho — snad — již v sekundě



Rozhodneme se, že napíšeme *obecnou* rovnici tečny t . Zde platí: $\mathbf{n}_t = \mathbf{ST}$, $\mathbf{ST} = (x_0 - m, y_0 - n)$, tj.:

$$t: (x_0 - m) \cdot x + (y_0 - n) \cdot y + c = 0$$

Ale bod $T \in t$, tj.:

$$(x_0 - m) \cdot x_0 + (y_0 - n) \cdot y_0 + c = 0 \implies c = -x_0(x_0 - m) - y_0(y_0 - n)$$

Potom:

$$t: (x_0 - m) \cdot x + (y_0 - n) \cdot y - x_0 \cdot (x_0 - m) - y_0 \cdot (y_0 - n) = 0$$

A po jednoduché úpravě

$$t: (x_0 - m) \cdot (x - x_0) + (y_0 - n) \cdot (y - y_0) = 0 \quad (2)$$

Zkusíme tuto rovnici tečny t ještě dále zjednodušit. Využijeme přitom faktu, že bod T leží též na kružnici k :

$$(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2$$

$$(x_0 - m) \cdot (x - x_0) + (y_0 - n) \cdot (y - y_0) = 0$$

Po sečtení těchto rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} (x_0 - m) \cdot (x_0 - m + x - x_0) + (y_0 - n) \cdot (y_0 - n + y - y_0) &= r^2 \\ (x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) &= r^2 \quad .] \end{aligned}$$

Věta. Rovnice tečny t ke kružnici $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v bodě dotyku $T = [x_0, y_0]$ je

$$(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$$

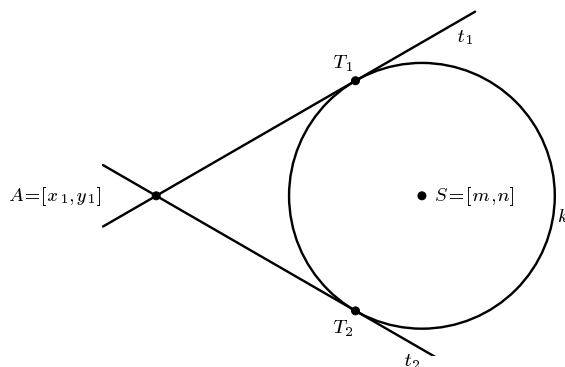
Příklad.

11. Napište rovnici tečny kružnice $k: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ v bodě dotyku $T = [2, y_0]$, $y_0 > 0$. [$t: y - 1 = 0$]
12. Napište rovnice tečen kružnice $k: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ v jejich průsečících s přímkou $p: y = x + 3$.
Určete pak průsečík P těchto tečen. [$t_1: 3x - y + 3 = 0$, $t_2: x - 3y + 13 = 0$, $P = [\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$]

Nyní přejdeme k další „typické“ geometrické úloze o tečnách. Řečeno analyticky: *napsat rovnice tečen k dané kružnici procházející daným bodem (který nemusí na dané kružnici ležet).*

Příklad 13. Je dána kružnice $k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a bod $A = [x_1, y_1]$, který leží vně kružnice k . Napište rovnice tečen ke kružnici k z bodu A .

[Řešení:



Označme $T = [x_0, y_0]$ bod dotyku.

Víme, že tečna t má (obecně) rovnici

$$t: (x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$$

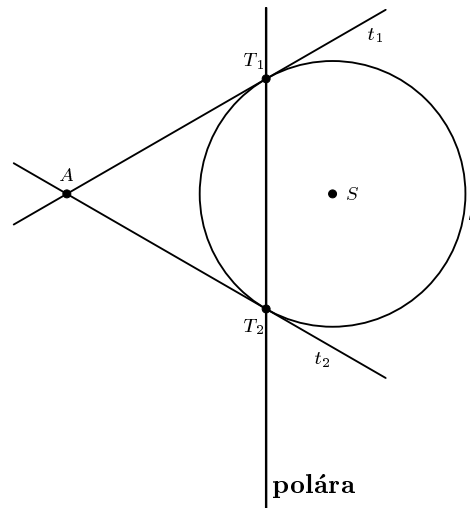
Na přímce t leží bod A , tj. musí platit:

$$(x_1 - m) \cdot (x_0 - m) + (y_1 - n) \cdot (y_0 - n) = r^2 \quad (3)$$

Podíváme-li se na rovnici (3) ještě jednou, vyplývá z ní, že bod $T = [x_0, y_0]$ rozhodně leží na přímce

$$p: (x - m) \cdot (x_1 - m) + (y - n) \cdot (y_1 - n) = r^2 \quad (4)$$

Na této přímce ale leží oba body dotyku T_1, T_2 , takže přímka p je zároveň rovnicí přímky T_1T_2 . Tato přímka se nazývá **polára bodu A vzhledem ke kružnici k** ⁵.



Nyní je již jasný postup při psaní rovnic tečen ke kružnici z bodu ležícího vně kružnice:

1. Napíšeme rovnici poláry p bodu A vzhledem ke kružnici k

$$p: (x - m) \cdot (x_1 - m) + (y - n) \cdot (y_1 - n) = r^2$$

2. Vypočítáme průsečíky T_1, T_2 poláry p a kružnice k (dostaneme tak body dotyku hledaných tečen a kružnice k).
3. Napíšeme rovnici tečny kružnice k v bodě T_1 (a dostaneme tak první hledanou tečnu) a pak rovnici tečny v bodě dotyku T_2 (druhá hledaná tečna).

Uvedený postup si vyzkoušejte na konkrétním příkladu.

Příklad 14. Napište rovnice tečen ke kružnici $k: x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ z bodu $A = \left[2 + \frac{16\sqrt{7}}{7}; -3\right]$.

[Řešení: zapíšeme stručně podle výše uvedeného postupu. Nejprve převedeme obecný tvar rovnice kružnice k na středový tvar:

$$k: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Nyní už můžeme použít zmněného postupu.

1. $p: x - 2 - \sqrt{7} = 0$
2. $T_1 = [2 + \sqrt{7}, 0], T_2 = [2 + \sqrt{7}, -6]$
3. $t_1: \sqrt{7}x + 3y - 2\sqrt{7} - 7 = 0, t_2: \sqrt{7}x - 3y - 2\sqrt{7} - 25 = 0.$

⁵pokud leží daný bod A vně kružnice, zřejmě vždy existují dva body dotyku T_1, T_2 , tj. *polára* je opravdu v tomto případě určena body T_1, T_2 . Dále si uvědomme, že zřejmě pro různé body A (ležící vně kružnice) jsou body dotyku tečen ke k různé, tj. i poláry jsou různé. Naopak: leží-li bod A vně kružnice k , je polára *jednoznačně* určena.

No a opravdovou „lahůdkou“ je výpočet společných tečen ke dvěma kružnicím. Výpočet v podstatě „kopíruje“ konstrukční řešení (ve kterém se samozřejmě využívá stejnolehlost).

Příklad 15. Napište rovnice společných tečen ke kružnicím

$$k: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$$

$$l: x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

[Výsledek: $t_1: 4x - 3y - 10 = 0$, $t_2: y - 2 = 0$, $tt_3: 3x + 4y - 5 = 0$, $t_4: x - 1 = 0$]

Uvedme dále ještě jedno (vcelku zřejmé) tvrzení.

Věta. Je-li dána kružnice $k(S, r)$, $S = [m, n]$, pak pro libovolný bod $X = [x, y]$ roviny platí:

$$X \text{ leží na kružnici } k \iff (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

$$X \text{ leží v kruhu } K(S, r) \iff (x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2$$

$$X \text{ leží vně kruhu } K(S, r) \iff (x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2$$

No a na úplný závěr „povídání“ o kružnici si uvedme ještě několik příkladků.

Příklady.

16. Veďte bodem $M = [2, 1]$ tečny ke kružnici s rovnicí $(x - 5)^2 + (y - 10)^2 = 9$. $[x = 2, 4x - 3y - 5 = 0]$
17. Určete body dotyku tečen vedených bodem $O = [0, 0]$ ke kružnici s rovnicí $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 49 = 0$.
 $[T_1 = [-\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}], T_2 = [-\frac{21}{5}; -\frac{28}{5}]]$
18. Najděte průsečíky kružnic daných rovnicemi $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$. V každém průsečíku určete tečny obou kružnic a úhel, který tečny svírají. $[[1, 2], [3, 2], y - x - 1 = 0, x - 1 = 0, \frac{\pi}{4}; x + y - 5 = 0, x - 3 = 0, \frac{\pi}{4}]$
19. Ukažte, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ leží bod $K = [2 + 3 \cos t; 7 + 3 \sin t]$ na kružnici se středem $S = [2, 7]$ a poloměrem $r = 3$.⁶
20. Ukažte, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ leží bod $K = [10 \cos^2 t; 10 \sin t \cos t]$ na kružnici se středem $S = [5, 0]$ a poloměrem $r = 5$.
21. Napište rovnici kružnice, která
 - a) prochází středy stran trojúhelníku ABC , $A = [1, 5]$, $B = [3, 9]$, $C = [5, -3]$. Určete její průsečíky se stranami trojúhelníku ABC ;
 - b) má střed v bodě $S = [5, 4]$ a dotýká se přímky $p: 5x - 12y - 29 = 0$;
 - c) prochází bodem $M = [2, 4]$ a dotýká se obou souřadnicových os.

$$[a) x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{29}{4}y - \frac{5}{4} = 0, [\frac{133}{37}], [-\frac{1}{5}, \frac{37}{5}], [-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}]; b) (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16; c) x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0, x^2 + y^2 - 20x - 20y + 100 = 0]$$

22. Pro která $p \in \mathbb{R}$ je rovnicí $x^2 + y^2 - 2x + 8y + p = 0$ dána kružnice? Určete p tak, aby tato kružnice
 - a) procházela počátkem soustavy souřadnic;
 - b) dotýkala se osy x ;
 - c) dotýkala se osy y .

$$[p < 17. a) 0; b) 1; c) 16.]$$

⁶Obecně lze ukázat, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= m + r \cdot \cos t \\ y &= n + r \cdot \sin t \end{aligned} \quad , \text{ kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

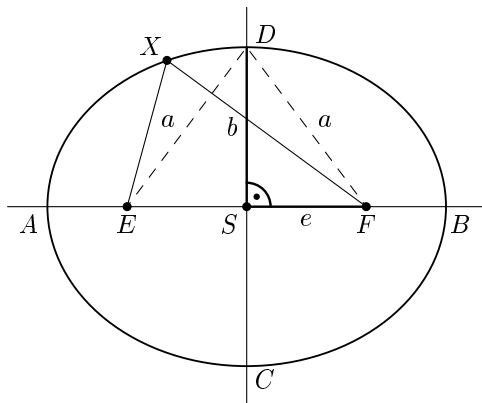
je určena kružnice se středem $S = [m, n]$ a poloměrem r . Tyto rovnice se nazývají **parametrické rovnice kružnice k** .

2. Elipsa

Defnice. V rovině jsou dány body E, F a číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že $2a > |EF|$. **Elipsa** je množina všech bodů X roviny, pro které platí

$$|EX| + |XF| = 2a.$$

Body E, F se nazývají **ohniska** elipsy, číslo a se nazývá **hlavní poloosa** elipsy⁷.



Z definice (a z obrázku) je hned vidět, že je elipsa středově souměrná podle středu úsečky EF . Tento bod se nazývá **střed elipsy** a (většinou) se označuje S .

Označení:

S ... střed elipsy

E, F ... ohniska elipsy

EF ... hlavní osa elipsy

A, B ... hlavní vrcholy elipsy

C, D ... vedlejší vrcholy elipsy

a ... hlavní poloosa

dle definice musí být: $|FB| + |BE| = 2a \implies |AE| + |EB| = 2a \implies |SB| = a$

b ... vedlejší poloosa, $b = |SD|$

e ... tzv. *excentricita (výstřednost) elipsy*, $|EF| = 2e \implies |SF| = e$

Platí: $a^2 = b^2 + e^2$

Poznámka. Je-li $E = F$, pak je elipsa kružnicí s poloměrem a .

V dalším studiu elips si podstatně zjednodušíme situaci. Budeme se dále zabývat pouze takovými elipsami, jejichž hlavní a vedlejší osy budou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic.

⁷Přiznejme hned na začátku, že se většinou nerozlišuje mezi pojmy *velikost hlavní poloosy* — tj. přesněji řečeno: *číslo udávající velikost hlavní poloosy* a samotnou poloosou jakožto *přímku*. Tudíž písmeno a bude někdy značit samotnou *hlavní poloosu* a někdy *velikost hlavní poloosy*.

Odvození rovnice elipsy

Zvolme soustavu souřadnic v rovině tak, že počátek bude středem elipsy (tj. středem úsečky EF) a souřadná osa x bude dána přímkou EF . Pak platí:

Bude-li $X = [x, y]$ libovolný bod roviny, pak bude dozajista platit:

$$X \in \varepsilon \iff |XE| + |XF| = 2a,$$

tj.:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-e-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(e-x)^2 + (0-y)^2} &= 2a \\ (e+x)^2 + y^2 + (e-x)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} &= 4a^2 \\ 2 \cdot \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} &= 4a^2 - 2y^2 - (e+x)^2 - (e-x)^2 = \\ &= 4a^2 - 2y^2 - e^2 - 2ex - x^2 - e^2 + 2ex - x^2 = \\ &= 4a^2 - 2y^2 - 2e^2 - 2x^2 \\ \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} &= 2a^2 - (y^2 + e^2 + x^2) \\ (e^2 + x^2 + y^2 + 2ex) \cdot (e^2 + x^2 + y^2 - 2ex) &= 4a^4 - 4a^2(y^2 + e^2 + x^2) + (y^2 + e^2 + x^2)^2 \\ e^2x^2 &= a^2(y^2 + e^2 + x^2) = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 - a^4 \\ a^4 - a^2y^2 - a^2e^2 &= x^2 \cdot (a^2 - e^2) \\ a^2 \cdot (a^2 - e^2) - a^2y^2 &= x^2 \cdot (a^2 - e^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Protože však platí: $a^2 - e^2 = b^2$, můžeme dále psát:

$$\begin{aligned} a^2b^2 - a^2y^2 &= x^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Několikrát jsme však použili operaci umocňování, což není ekvivalentní úprava. Otázka tedy zní: jsou rovnice (5) a (6) ekvivalentní? V předchozích výpočtech jsme ukázali, že každé řešení rovnice (5) je i řešením rovnice (6). Platí to i naopak?

Tj., nechť $[x, y]$ splňuje rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pak platí:

$$\begin{aligned} x^2b^2 + y^2a^2 &= a^2b^2 \\ y^2 &= \frac{a^2b^2 - x^2b^2}{a^2} = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a^2 - e^2) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - x^2 - e^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} \end{aligned}$$

Tj.:

$$y^2 = a^2 - x^2 - e^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} \tag{7}$$

Vypočítejme nyní postupně levou stranu (5):

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = \sqrt{e^2 + 2ex + x^2 + a^2 - x^2 - e^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2} = \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{e}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{e}{a}x\right| \tag{8}$$

Ukážeme, že musí vždy platit: $a + \frac{e}{a}x \geq 0$.

Víme totiž z předpokladu, že platí:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \implies x^2 \leq a^2 \implies |x| \leq a$$

Dále platí:

$$\left| \frac{xe}{a} \right| = \frac{e}{a} \cdot |x| \leq |x| \leq a \implies -\frac{e}{a}x \leq a \implies \frac{e}{a}x \geq -a$$

Takže:

$$a \geq a \wedge \frac{e}{a}x \geq -a \implies a + \frac{e}{a}x \geq a - a = 0 \implies a + \frac{e}{a}x \geq 0$$

Celkově tedy:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = \left| a + \frac{e}{a}x \right| = a + \frac{e}{a}x$$

Podobně se ukáže, že $\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a - \frac{e}{a}x$.

Pravá strana rovnice (5) je tedy:

$$a + \frac{e}{a}x + a - \frac{e}{a}x = 2a$$

což se rovná levé straně rovnice (5) a tedy uspořádaná dvojice $[x, y]$ je řešením i rovnice (5).

Po velkých a možná i náročných výpočtech můžeme tedy konstatovat následující větu:

Věta. Je-li dána elipsa se středem $S = [0, 0]$ a velikostmi poloos a, b , pak libovolný bod $X = [x, y]$ roviny bude na dané elipse ležet právě tehdy, když

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (9)$$

Rovnice (9) se nazývá **středová rovnice elipsy**.

Příklad 1. Sestrojte elipsu, ve které platí: $a = 5$ j, $b = 3$ j. Zvolte měřítko 1 j = 1,5 cm.

(Na zvláštní list papíru proveďte **co nejpresnější a co nejhezčí** konstrukci, tento papír si podepište a vložte do těchto materiálů !!)

Příklad 2. Napište rovnici elipsy s ohnisky $E = [-1, 0]$, $F = [1, 0]$, která prochází bodem $K = [1, \frac{8}{3}]$. Určete její hlavní a vedlejší vrcholy.

[Řešení: střed S elipsy je středem úsečky $EF \implies S = [0, 0]$. Dále plyne ze zadání, že $e = 1$.

Zabývejme se nyní rovnicí dané elipsy:

$$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Víme, že $a^2 = e^2 + b^2 = 1 + b^2$. Tj.:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1+b^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ K \in \varepsilon: \frac{1}{1+b^2} + \frac{\frac{64}{9}}{b^2} &= 1 \\ 9b^2 + 64(1+b^2) &= 9b^2 + 9b^4 \\ 9b^4 - 64b^2 - 64 &= 0 \\ b^2 = 8 \vee b^2 = -\frac{8}{9} &(\implies \text{K.O.}) \\ b^2 = 8 \implies a^2 = 1 + 8 &= 9 \\ \varepsilon: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} &= 1 \end{aligned}$$

Dále pak: $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, $A = [-3, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, -2\sqrt{2}]$, $D = [0, 2\sqrt{2}]$]

Příklad 3. Ověřte, že pro každý bod elipsy u předchozího příkladu se součet vzdáleností od bodů $E = [-1, 0]$, $F = [1, 0]$ rovná číslu 6.

[Řešení: Rovnice dané elipsy je (jak jsme odvodili v předchozím příkladu):

$$\varepsilon: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Tj. pro libovolný bod $X = [x, y]$ elipsy platí:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \implies 8x^2 + 9y^2 = 72 \implies y^2 = \frac{72 - 8x^2}{9} = 8 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right).$$

Potom:

$$\begin{aligned} |EX| + |FX| &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 1 + 8 \cdot 1 - \frac{x^2}{9}} + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 8 \cdot 1 - \frac{x^2}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + 2x + 9} + \sqrt{\frac{1}{9}x^2 - 2x + 9} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}x + 3\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}x - 3\right)^2} = \left|\frac{1}{3}x + 3\right| + \left|\frac{1}{3}x - 3\right| \end{aligned}$$

Ale:

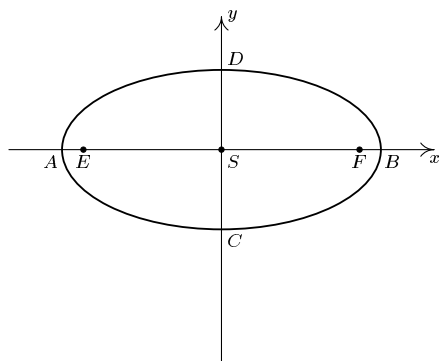
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \implies x^2 \leq 9 \implies x \in \langle -3, 3 \rangle.$$

Takže:

$$|EX| + |FX| = \underbrace{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left|\frac{1}{3}x - 3\right|}_{\leq 0} = \frac{1}{3}x + 3 - \frac{1}{3}x + 3 = 6 \quad]$$

Polohy elipsy

- Elipsa se středem $S = [0, 0]$

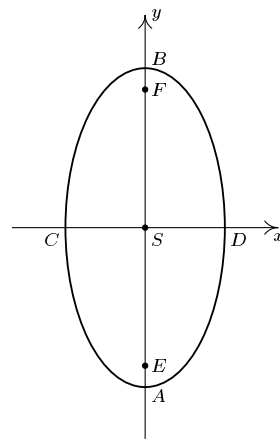


$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$S = [0, 0]$$

$$E = [-e, 0], F = [e, 0]$$

$$A = [-a, 0], B = [a, 0], C = [0, -b], D = [0, b]$$



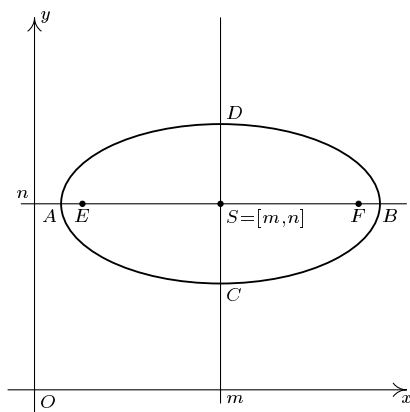
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

$$S = [0, 0]$$

$$E = [0, -e], F = [0, e]$$

$$A = [0, -a], B = [0, a], C = [-b, 0], D = [b, 0]$$

- Elipsa se středem $S = [m, n]$



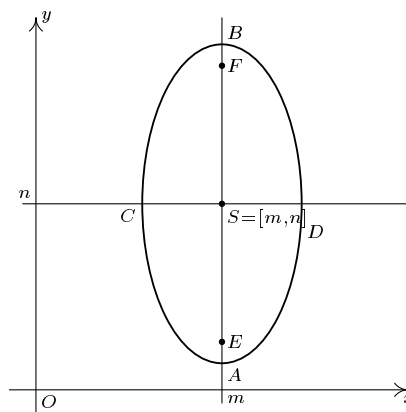
$$\boxed{\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1}$$

$$S = [m, n]$$

$$E = [-e + m, n], F = [e + m, n]$$

$$A = [-a + m, n], B = [a + m, n],$$

$$C = [m, -b + n], D = [m, b + n]$$



$$\boxed{\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1}$$

$$S = [m, n]$$

$$E = [m, -e + n], F = [m, e + n]$$

$$A = [m, -a + n], B = [m, a + n],$$

$$C = [-b + m, n], D = [b + m, n]$$

Obecná rovnice elipsy

Podobně jako u kružnice odvodíme nyní obecnou rovnici elipsy.

Je-li dána středová rovnice elipsy, např.:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

a algebraicky ji upravíme na tvar

$$\boxed{A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0}$$

kde $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, $A \cdot B > 0$, dostaneme tzv. **obecnou rovnici elipsy**.

Příklad 4. je dána elipsa ε : $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$. Najděte její charakteristické prvky (tj. velikosti poloos, excentricitu, souřadnice středu, vrcholů a ohnisek).

[Řešení: Podobně jako u kružnice se budeme snažit „dostat“ z obecné rovnice elipsy rovnici středovou. Použijeme znovu metodu doplnění na čtverec:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 &= 0 \\ 9 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 16 \cdot (y^2 - 2y + 1) &= 92 + 36 + 16 \\ 9 \cdot (x + 2)^2 + 16 \cdot (y - 1)^2 &= 144 \\ \frac{9(x + 2)^2}{144} + \frac{16(y - 1)^2}{144} &= 1 \\ \frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Tj.: $S = [-2, 1]$, $a = 4$, $b = 3$.

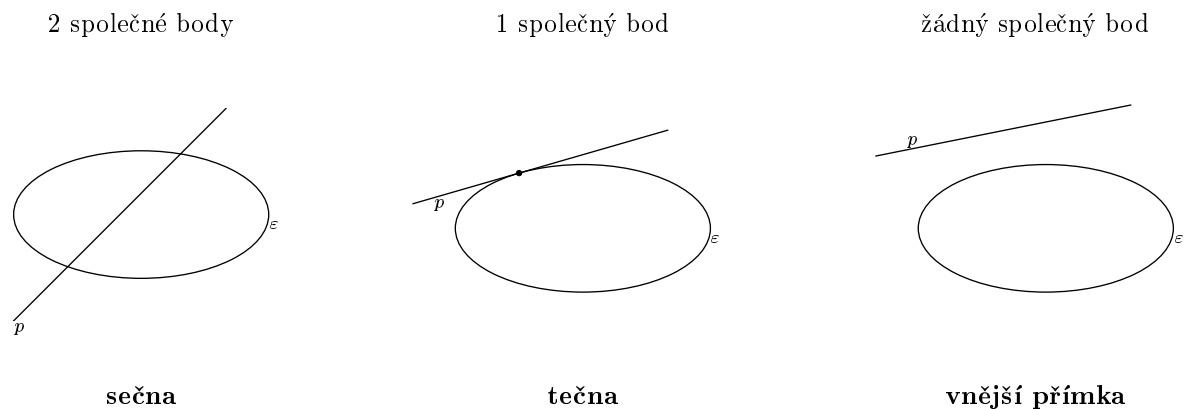
$$e^2 = a^2 - b^2 = 7 \implies e = \sqrt{7}$$

$$E = [-\sqrt{7} - 2, 1], F = [\sqrt{7} - 2, 1], A = [-6, 1], B = [2, 1], C = [-2, -2], D = [-2, 4].$$

]

Přímka a elipsa

Nejprve si uveďme, jaká může být vzájemná poloha elipsy a libovolné přímky v rovině. Podobně jako u kružnice může mít přímka s elipsou dva, popř. jeden, popř. žádný společný bod.

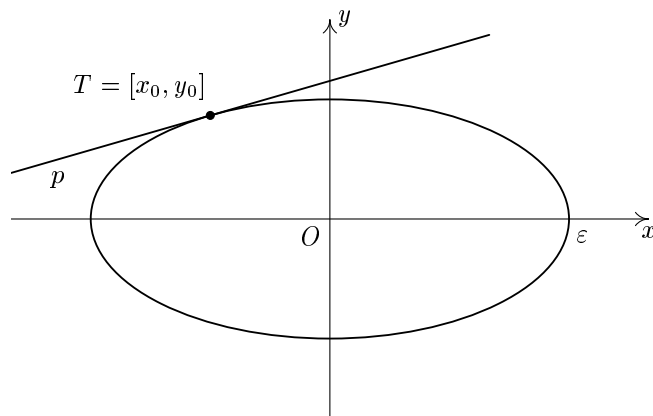


Příklad 5. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu přímky $p: y = x + c$ a elipsy $\varepsilon: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 $[c \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \Rightarrow p$ je sečna ε ; $c \in \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\} \Rightarrow p$ je tečna ε ; $c \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty) \Rightarrow p$ je vnější přímka ε]

Tečna elipsy

Nyní odvodíme rovnici tečny k elipse. Pro jednoduchost se budeme zabývat tečnou k elipse, která má střed v počátku soustavy souřadnic.

Nechť $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je libovolná elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic a nechteť $T = [x_0, y_0]$ je její libovolný bod.



Přímka

$$\begin{aligned} t: x &= x_0 + t \cdot u_1 \\ y &= y_0 + t \cdot u_2, \quad t \in \mathbb{R} \text{ lib.} \end{aligned}$$

se směrovým vektorem $u_t = (u_1, u_2)$ bude tečnou elipsy ε právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot u_1 \\ y &= y_0 + t \cdot u_2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

bude mít právě jedno řešení.

Budeme nyní soustavu (10) postupně upravovat.

$$\begin{aligned}\frac{(x_0 + tu_1)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + tu_2)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x_0^2 + 2x_0tu_1 + t^2u_1^2}{a^2} + \frac{y_0^2 + 2y_0tu_2 + t^2u_2^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{2x_0tu_1}{a^2} + \frac{t^2u_1^2}{a^2} + \frac{2y_0tu_2}{b^2} + \frac{t^2u_2^2}{b^2} &= 1\end{aligned}\quad (11)$$

Ale bod $T = [x_0, y_0]$ leží na elipse ε , tj.: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Dosadíme-li to do (11) a upravíme-li tuto rovnici, dostaneme

$$t \cdot \left(\frac{2x_0u_1}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2} \right) + t^2 \cdot \left(\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} \right) = 0$$

Tato kvadratická rovnice bude mít právě jeden kořen, jestliže $D = 0$. Tj.:

$$D = \left(\frac{2u_1x_0}{a^2} + \frac{2y_0u_2}{b^2} \right)^2 = 0 \iff \frac{u_1x_0}{a^2} + \frac{u_2y_0}{b^2} = 0$$

Poslední podmínka však znamená:

$$u_1 \cdot \frac{x_0}{a^2} + u_2 \cdot \frac{y_0}{b^2} = 0 \iff (u_1, u_2) \cdot \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right) = 0 \iff (u_1, u_2) \perp \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right)$$

Ale vektor (u_1, u_2) je směrovým vektorem tečny t , tj. vektor $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right)$ je normálovým vektorem této tečny. Obecná rovnice tečny t tedy je:

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y + c = 0.$$

Zbývá určit koeficient c . Víme však, že bod T musí na tečně t ležet, tj.:

$$c = -\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = -1$$

tj.:

$$t: \frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

Věta. Je-li dána elipsa $\varepsilon \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ a její libovolný bod $T = [x_0, y_0]$, pak rovnice tečny t elipsy ε v bodě T je

$$t: \frac{(x-m) \cdot (x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n) \cdot (y_0-n)}{b^2} = 1$$

Poznámka. Vidíme, že rovnici tečny k elipse lze „vyrobit“ z rovnice elipsy úplně analogicky, jako u kružnice. Vezmeme-li si *středovou* rovnici elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ a představíme-li si mocninu $(x-m)^2$ jako $(x-m) \cdot (x-m)$ a podobně $(y-n)^2 = (y-n) \cdot (y-n)$, pak stačí jednu dvojici x, y nahradit konkrétními souřadnicemi tečného bodu x_0, y_0 .

Příklad.

6. Ukažte, že bod $H = [6, -2]$ je bodem elipsy

$$\varepsilon: \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{4(y+4)^2}{25} = 1.$$

Napište rovnici tečny této elipsy v bodě H .

$$[t: 3x + 8y - 2 = 0]$$

7. Určete q tak, aby přímka $y = 2x + q$ byla tečnou elipsy $\varepsilon: 4x^2 + 9y^2 = 36$. $[q = \pm 2\sqrt{10}]$

Stejným postupem jako u kružnice také napíšeme rovnice tečen k dané elipse z daného bodu, který leží vně elipsy. Tj. nejprve napíšeme rovnici *poláry*, pak vypočítáme průsečíky elipsy s polárou – dostaneme tak tečné body, kterými hledané (dvě) tečny procházejí. Nakonec napíšeme rovnici tečny k elipse procházející tečným bodem (ležícím na elipse). Vyzkoušejte si tento postup na následujícím příkladu.

Příklad 8. Bodem $A = [-6, -2]$ vedte tečny k elipse $\varepsilon: 4x^2 + 9y^2 = 36$.

$$[t_1: y + 2 = 0, t_2: 8x - 9y + 30 = 0]$$

Závěrečná poznámka. Tečnu ke kružnici, která prochází daným bodem ležícím na kružnici, umíme (celkem jednoduše) zkonstruovat. Složitější situace je však u tečny k elipse bodem, který na elipse leží. Dá se dokázat následující věta:

Věta. Nechť je dána elipsa, nechť E, F jsou její ohniska. Bod T nechť je bod, který leží na elipse. Tečna elipsy v bodě T je osou úhlu přímk ET a FT a to tou osou, která neprotíná úsečku EF .

Příklady.

9. Napište rovnici elipsy s ohnisky $E = [2, 5]$, $F = [10, 5]$, která prochází bodem $M = [6, 7]$.

$$[(x - 6)^2 + 5(y - 5)^2 - 20 = 0]$$

10. napište rovnice tečen elipsy, která má rovnici $(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$, v jejich průsečících s přímkou $y = -2x$.

$$[2x - y - 4 = \pm 2\sqrt{2}]$$

11. Určete hodnotu p tak, aby tečny vedené bodem $[p, 0]$ k elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ byly navzájem kolmé.

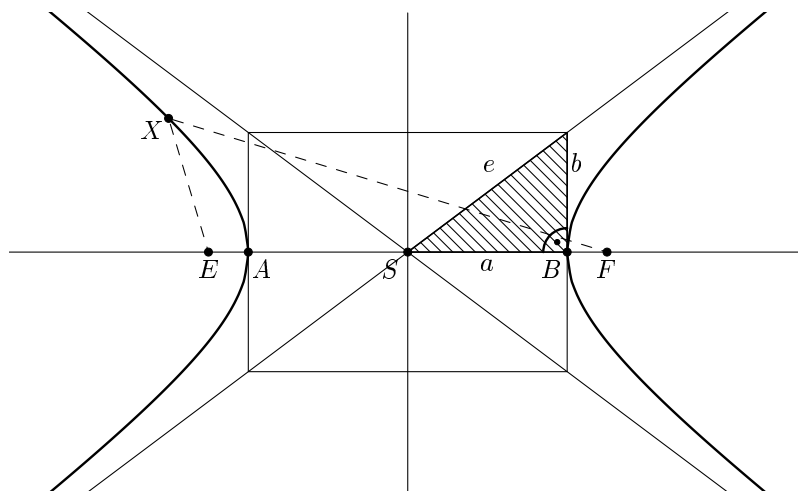
$$[p = \pm\sqrt{13}]$$

3. Hyperbola

Defnice. V rovině jsou dány dva různé body E, F a kladné číslo $a \in \mathbb{R}^+$ takové, že $2a < |EF|$. **Hyperbola** je množina všech bodů X roviny, pro které platí

$$||EX| - |XF|| = 2a.$$

Body E, F se nazývají **ohniska** hyperboly, číslo a se nazývá **hlavní poloosa** hyperboly⁸.



⁸stejně jako u elipsy i v tomto případě přiznejme, že se většinou nerozlišuje mezi pojmy *velikost hlavní poloosy* — tj. přesněji řečeno: *číslo udávající velikost hlavní poloosy* a samotnou poloosou jakožto *přímkou*. Tudíž písmeno a bude někdy značit samotnou hlavní poloosu a někdy velikost hlavní poloosy.

Z definice (a z obrázku) je hned vidět, že je hyperbola je (stejně jako elipsa) středově souměrná podle středu úsečky EF . Tento bod se nazývá **střed hyperboly** a (většinou) se označuje S . Dále je z obrázku vidět, že hyperbola se skládá ze dvou „souvislých“ částí, kterým říkáme **větvě hyperboly**.

Označení:

S	...	střed hyperboly
E, F	...	ohniska hyperboly
EF	...	hlavní osa hyperboly
osa úsečky EF	...	vedlejší osa hyperboly
A, B	...	hlavní vrcholy hyperboly
a	...	hlavní poloosa
dle definice musí být: $ AF - AE = 2a \implies AF - BF = 2a \implies SA = a$		
označíme: $2e = EF \implies e = SE = SF $		
e	...	tzv. <i>excentricita (výstřednost) hyperboly</i> ,
označíme: $b = \sqrt{e^2 - a^2}$		
b	...	vedlejší poloosa hyperboly
Platí: $e^2 = a^2 + b^2$		

Poznamenejme, že z úseček a, b, e byla u elipsy nejdelší hlavní poloosa a , u hyperboly je nejdelší excentricita e . Další úvahy budou velmi obdobné, jaké jsme prováděli u elipsy.

V dalším studiu hyperboly si (stejně jako u elipsy) podstatně zjednodušíme situaci. Budeme se dále zabývat pouze takovými hyperbolami, jejichž hlavní osa bude rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic.

Odvození rovnice hyperboly

Zvolme soustavu souřadnic v rovině tak, že počátek bude středem hyperboly (tj. středem úsečky EF) a souřadná osa x bude dána přímkou EF . Pak platí:

Bude-li $X = [x, y]$ libovolný bod roviny, pak bude platit:

$$X \in h \iff ||XE| - |XF|| = 2a,$$

tj.:

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{(-e-x)^2 + (0-y)^2} - \sqrt{(e-x)^2 + (0-y)^2} \right| = 2a & (12) \\ & (e+x)^2 + y^2 - (e-x)^2 + y^2 - 2 \cdot \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 4a^2 \\ & e^2 + 2ex + x^2 + y^2 + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 - 2 \cdot \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 4a^2 \\ & 2e^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot \sqrt{(x^2 + 2xe + e^2 + y^2) \cdot (x^2 - 2xe + e^2 + y^2)} = 4a^2 \\ & e^2 + x^2 + y^2 - 2a^2 = 2 \cdot \sqrt{(x^2 + 2xe + e^2 + y^2) \cdot (x^2 - 2xe + e^2 + y^2)} \\ & (e^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2 \cdot (e^2 + x^2 + y^2) + 4a^4 = (x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4x^2e^2 \\ & e^2x^2 = a^2 \cdot (e^2 + x^2 + y^2) - a^4 \\ & e^2x^2 = a^2e^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - a^4 \\ & e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2 - e^2 - a^4 \\ & x^2 \cdot (e^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2 \cdot (e^2 - a^2) \end{aligned}$$

Protože však platí: $e^2 - a^2 = b^2$, můžeme dále psát:

$$\begin{aligned} x^2b^2 - y^2a^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Podobně jako u elipsy bychom dokázali, že platí: každé řešení rovnice (13) je i řešením rovnice (12). Platí tedy následující věta.

Věta. Je-li dána hyperbola se středem $S = [0, 0]$ a velikostmi poloos a, b , pak libovolný bod $X = [x, y]$ roviny bude na dané hyperbole ležet právě tehdy, když

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá **středová rovnice hyperboly**.

Příklad 1. Sestrojte hyperbolu, ve které platí: $e = 10$ j, $a = 8$ j. Zvolte měřítko 1 j = 1,5 cm.

(Na zvláštní list papíru proveďte **co nejpresnější a co nejhezčí** konstrukci, tento papír si podepište a vložte do těchto materiálů !!)

Příklad 2. Ukažte, že graf funkce $y = \frac{1}{x}$ je totožný s množinou všech bodů v rovině, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od bodů $F = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $E = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ se rovná $2\sqrt{2}$.

Ze středové rovnice hyperboly plyne:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

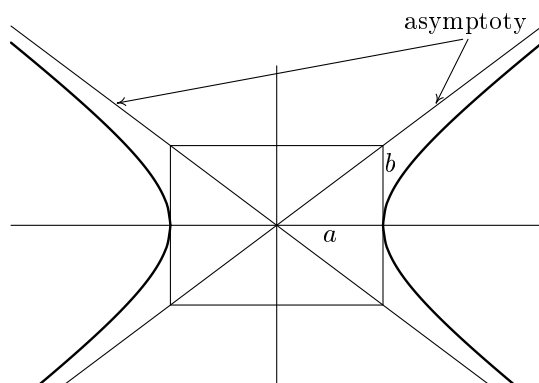
Tj., body $X = [x, y]$ v rovině, pro které platí

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \vee \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

na hyperbole rozhodně neleží. Přímkám $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ se říká **asymptoty hyperboly**⁹ (budeme je nadále značit a_1, a_2 .)

Rovnice asymptot lze upravit na tvar:

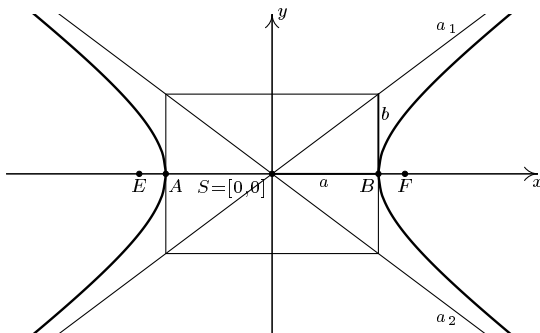
$$a_1: y = \frac{b}{a} \cdot x \quad a_2: y = -\frac{b}{a} \cdot x$$



Polohy hyperboly

- Hyperbola se středem $S = [0, 0]$

⁹Obecně se dá zjednodušeně říct, že *asymptota grafu funkce* je taková přímka, ke které se graf funkce (nebo alespoň některá jeho část) neustále blíží, ale nikdy se ji nedotkne. Přesnou definici asymptoty uslyší pouze ti studenti, kteří navštěvují Seminář z matematiky v rámci tématu *Diferenciální počet*.



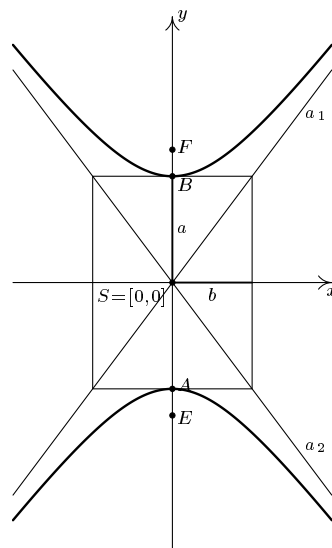
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$S = [0, 0]$$

$$E = [-e, 0], F = [e, 0]$$

$$A = [-a, 0], B = [a, 0]$$

$$a_1: y = \frac{b}{a}x, a_2: y = -\frac{b}{a}x$$



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

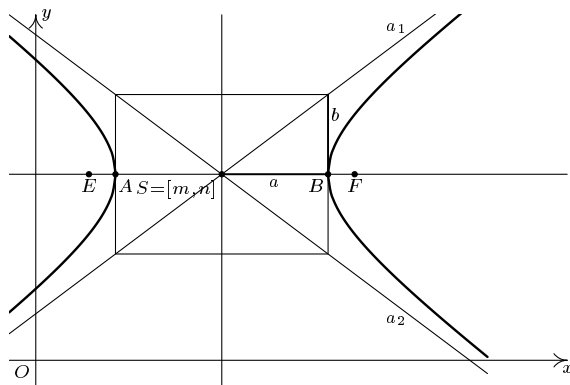
$$S = [0, 0]$$

$$E = [0, -e], F = [0, e]$$

$$A = [0, -a], B = [0, a]$$

$$a_1: y = \frac{a}{b}x, a_2: y = -\frac{a}{b}x$$

- Hyperbola se středem $S = [m, n]$



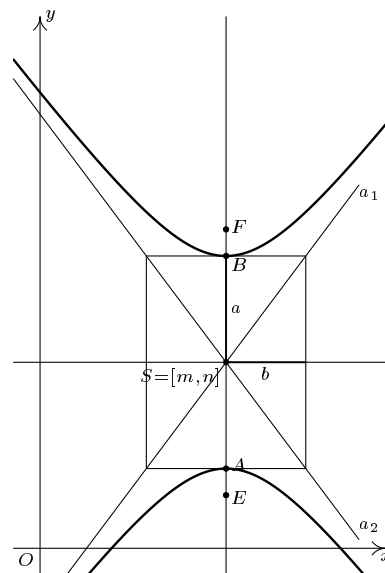
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$S = [m, n]$$

$$E = [-e + m, n], F = [e + m, n]$$

$$A = [-a + m, n], B = [a + m, n]$$

$$a_1: y - n = \frac{b}{a}(x - m), a_2: y - n = -\frac{b}{a}(x - m)$$



$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$

$$S = [m, n]$$

$$E = [m, -e + n], F = [m, e + n]$$

$$A = [m, -a + n], B = [m, a + n]$$

$$a_1: y - n = \frac{a}{b}(x - m), a_2: y - n = -\frac{a}{b}(x - m)$$

Poznámka. Jsou-li asymptoty hyperboly k sobě kolmé (v tomto případě platí $a = b$), pak se hyperbola nazývá **rovnomoosá hyperbola**.

Příklad 3. Osy hyperboly jsou totožné s osami soustavy souřadnic, její excentricita je $e = 5$. Hyperbola prochází bodem $A = [4, 3]$. Napište její rovnici a rovnici asymptot.

$$[h_1: \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1, a_1: y = \frac{\sqrt{6}}{2}x, a_2: y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x, h_2: \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1, a_1: y = \frac{1}{2}x, a_2: y = -\frac{1}{2}x]$$

Obecná rovnice hyperboly

Podobně jako u kružnice a elipsy odvodíme nyní obecnou rovnici elipsy.

Je-li dána středová rovnice hyperboly, např.:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

a algebraicky ji upravíme na tvar

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0$$

kde $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, $A \cdot B < 0$, dostaneme tzv. **obecnou rovnici hyperboly**.

Příklad 4. Je dána hyperbola $h: 3x^2 - y^2 - 24x + 6y + 36 = 0$. Najděte její charakteristické prvky (tj. velikosti poloos, excentricitu, souřadnice středu, vrcholů a ohnisek, rovnice asymptot).

[Řešení: Podobně jako u kružnice a elipsy se budeme snažit „dostat“ z obecné rovnice hyperboly rovnici středovou. Použijeme znovu metodu doplnění na čtverec:

$$3x^2 - y^2 - 24x + 6y + 36 = 0$$

$$3 \cdot (x-4)^2 - (y-3)^2 = 3$$

$$\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$$

Tj.: $S = [4, 3]$, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$.

$$e^2 = a^2 + b^2 = 4 \implies e = 2$$

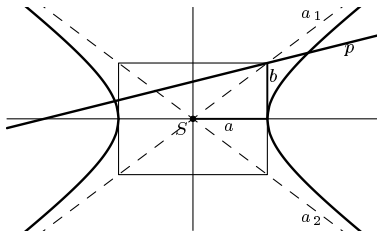
$$E = [-2 + 4, 3] = [2, 3], F = [2 + 4, 3] = [6, 3], A = [3, 3], B = [5, 3], a_1: \sqrt{3}x - y + 3 - 4\sqrt{3} = 0, a_2: \sqrt{3}x + y - 3 - 4\sqrt{3} = 0.]$$

Přímka a hyperbola

Podobně jako u kružnice a elipsy může mít přímka s hyperbolou dva, popř. jeden, popř. žádný společný bod. Situace však bude, narozdíl od elipsy, trošičku komplikovanější.

Máme-li dánu hyperbolu h a přímku p o rovnici $p: y = kx + q$, bude vzájemná poloha hyperboly a přímky záležet na směrnici k přímky p .

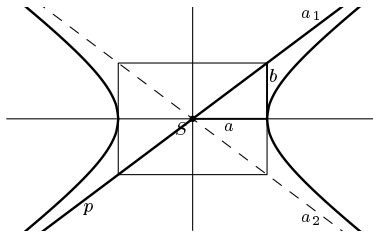
$$|k| < \frac{b}{a}$$



2 společné body

p je sečna

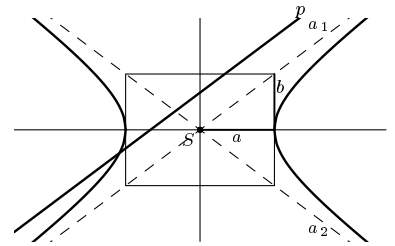
$$|k| = \frac{b}{a} \wedge S \in p$$



žádný společný bod

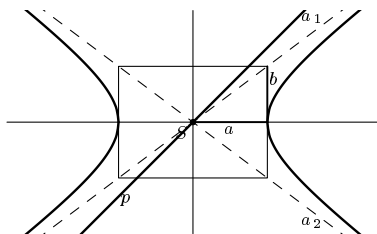
p je asymptota

$$|k| = \frac{b}{a} \wedge S \notin p$$



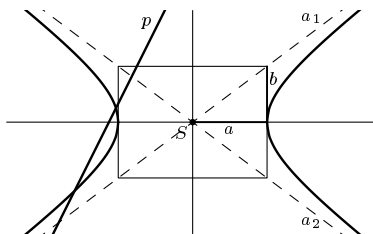
jeden společný bod

$$|k| > \frac{b}{a} \wedge S \in p$$



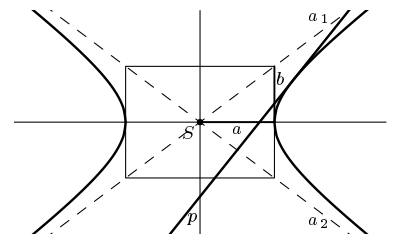
žádný společný body

$$|k| > \frac{b}{a} \wedge S \notin p$$



dva společné body

$$|k| > \frac{b}{a} \wedge S \notin p$$



jeden společný bod

p je tečna

Tečna hyperboly

Je-li dána hyperbola $h: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a její bod $T = [x_0, y_0]$, potom bychom podobně jako u elipsy dokázali, že tečna t hyperboly v tečném bodě $T = [x_0, y_0]$ má rovnici

$$t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Je-li dána hyperbola h : $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, pak tečna t v bodě $T = [x_0, y_0]$ má rovnici

$$t: \frac{(x-m) \cdot (x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n) \cdot (y_0-n)}{b^2} = 1$$

Podobně by to dopadlo při dalších možných rovnicích (a tedy poloh) hyperboly.

Příklad 5. Bodem $K = [2, 3]$ hyperboly h : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} = 1$ veďte všechny přímky, které s ní mají společný právě jeden bod.

[Řešení: Právě jeden bod s hyperbolou má přímka, která je tečnou hyperboly a pak přímka, která je rovnoběžná s asymptotou. Poněvadž „naše“ hledaná přímka má navíc procházet bodem K , budou řešením úlohy celkem tři přímky: tečna v bodě K a dvě rovnoběžky s jednotlivými asymptotami procházejícími bodem K .

Rovnice tečny procházející bodem $K = [2, 3]$:

$$\begin{aligned} t: \frac{x \cdot 2}{2} - \frac{y \cdot 3}{9} &= 1 \\ x - \frac{1}{3}y &= 1 \\ t: 3x - y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice přímk p_1 a p_2 rovnoběžných s asymptotami procházející bodem $K = [2, 3]$:

$$\begin{aligned} a_1: \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{3} \right) &= 0 & a_2: \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{3} \right) &= 0 \\ 3x - \sqrt{2}y &= 0 & 3x + \sqrt{2}y &= 0 \\ p_1: 3x - \sqrt{2}y + c &= 0 & p_2: 3x + \sqrt{2}y + c &= 0 \\ K \in p_1: 6 - 3\sqrt{2} &= -c & K \in p_2: 6 + 3\sqrt{2} &= -c \\ c &= 3\sqrt{2} - 6 & c &= -3\sqrt{2} - 6 \\ p_1: 3x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} - 6 &= 0 & p_2: 3x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Řešením jsou tedy tři přímky: $3x - y - 3 = 0$, $3x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} - 6 = 0$, $3x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} - 6 = 0$.

Příklad 6. Napište rovnici tečny hyperboly h : $(x-4)^2 - \frac{1}{3}(y-3)^2 = 1$ v jejím bodě $A = [2, 6]$. Ověřte, že tato tečna má s hyperbolou právě jeden společný bod. [$t: 2x + y - 10 = 0$]

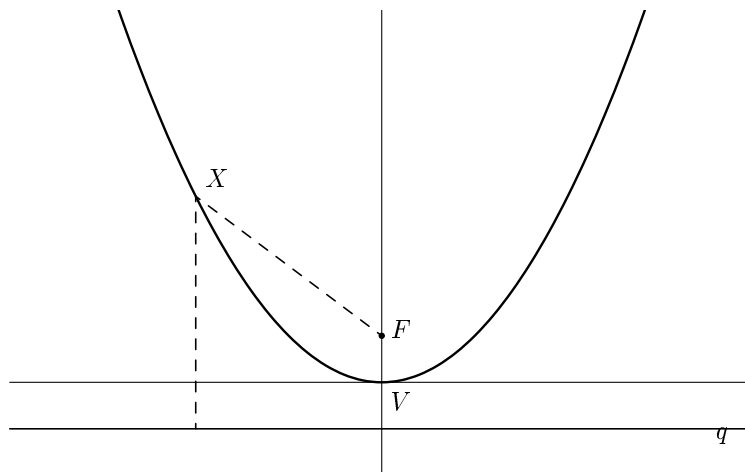
Příklady.

- Určete ohniska hyperboly s rovnicí $10x^2 - 5y^2 = 50$. Napište rovnici hyperboly, která má stejné asymptoty jako daná hyperbola, ale prochází bodem $M = [10, 0]$. [[$\sqrt{15}, 0$], [$-\sqrt{15}, 0$], $10x^2 - 5y^2 = 1000$]
- Hyperbola má ohniska $E = [-5, 0]$, $F = [5, 0]$ a prochází bodem $M = [1, 0]$. Napište její rovnici. [$24x^2 - y^2 = 24$]
- Hyperbola má rovnici $(x-3)^2 - 4y^2 = 1$. Najděte její průsečíky s osou y a rovnice tečen v těchto bodech. [[$0, \pm\sqrt{2}$], $3x \pm 4y\sqrt{2} - 8 = 0$]

4. Parabola

O parabole do této doby víme, že je grafem kvadratické funkce, ale přesnou definici paraboly zatím neznáme (oficiálně).

Definice. V rovině je dán bod F a přímka q , která jím neprochází. **Parabola** je množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q . Bod F se nazývá **ohnisko paraboly** a přímka q se nazývá **řídící přímka paraboly**.



Parabola zřejmě prochází bodem V , který je středem úsečky FD , kde D je pata kolmice vedené z ohniska F k řídicí přímce q . Tento bod V se nazývá *vrchol paraboly*.

Dále je zřejmé, že je parabola osově souměrná podle kolmice na řídicí přímku q procházející bodem F . Tato přímka se nazývá **osa paraboly**.

Příklad 1. Ukažte, že graf funkce $f: y = x^2$ je totožný s množinou všech bodů roviny, které mají od bodu $F = [0, \frac{1}{4}]$ stejnou vzdálenost jako od přímky $q: y = -\frac{1}{4}$.

V dalším studiu paraboly si opět podstatně zjednodušíme situaci. Budeme se dále zabývat pouze takovými parabolami, jejichž osa bude rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic.

Odvození rovnice paraboly

Předpokládejme, že parabola je dána svým ohniskem F a řídicí přímkou q . Označme $p = |Fq|$ vzdálenost bodu F od přímky q . Zvolme dále soustavu souřadnic v rovině tak, že počátek bude vrcholem paraboly a souřadná osa y bude její osou (tj. ohnisko F bude ležet na ose y .) Pak bude mít zřejmě bod F souřadnice $F = [0, \frac{1}{2}p]$, přímka q má rovnici $y = -\frac{p}{2}$.

Pak platí:

Bude-li $X = [x, y]$ libovolný bod roviny, pak bude platit:

$$X \in \text{par} \iff |XF| = |Xq|,$$

tj.:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \left|y + \frac{p}{2}\right| \\ x^2 + y^2 - py + \frac{1}{4}p^2 &= y^2 + py + \frac{1}{4}p^2 \\ x^2 &= 2py \end{aligned}$$

Věta. Je-li dána parabola s vrcholem $V = [0, 0]$ a jejíž osa je totožná s osou y (a označíme-li $p = |Fq|$, tj. p je vzdálenost ohniska a řídicí přímky), pak libovolný bod $X = [x, y]$ roviny bude na dané parabole ležet právě tehdy, když

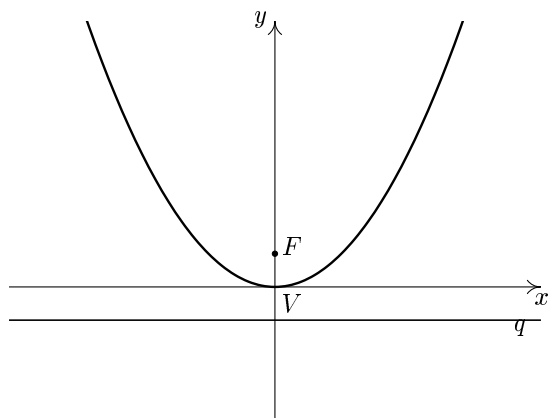
$$\boxed{x^2 = 2py} \tag{15}$$

Rovnice (15) se nazývá **vrcholová rovnice paraboly**.

Poznámka. Upozorňujeme na skutečnost, že parabola jakožto jediná kuželosečka nemá střed, ale má vrchol. Je to tedy jediná *vrcholová* kuželosečka. Kružnice, elipsa a hyperbola patří mezi tzv. *středové kuželosečky*.

Polohy paraboly

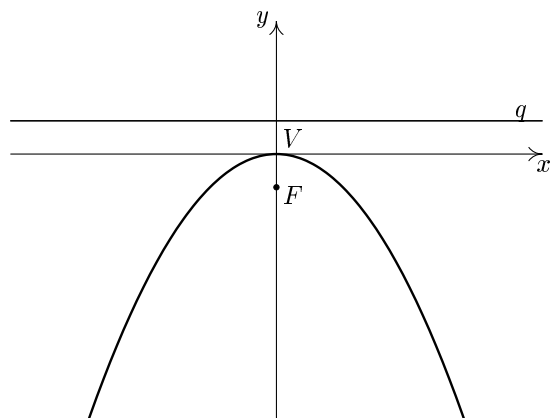
- Parabola s vrcholem $V = [0, 0]$, osa je totožná s osou y



$$x^2 = 2py$$

$$V = [0, 0]$$

$$F = [0, \frac{1}{2}p], \quad q: y = -\frac{1}{2}p$$

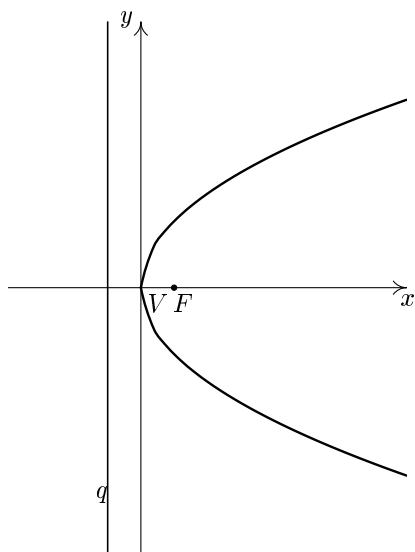


$$x^2 = -2py$$

$$V = [0, 0]$$

$$F = [0, -\frac{1}{2}p], \quad q: y = \frac{1}{2}p$$

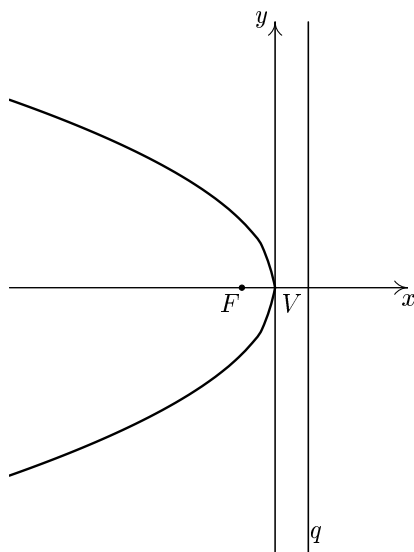
- Parabola s vrcholem $V = [0, 0]$, osa je totožná s osou x



$$y^2 = 2px$$

$$V = [0, 0]$$

$$F = [\frac{1}{2}p, 0], \quad q: x = -\frac{1}{2}p$$

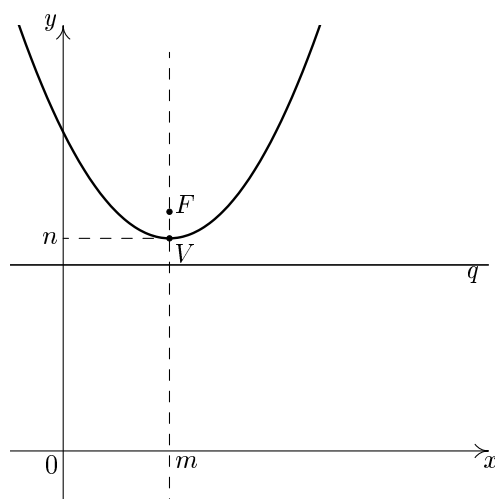


$$y^2 = -2px$$

$$V = [0, 0]$$

$$F = [-\frac{1}{2}p, 0], \quad q: x = \frac{1}{2}p$$

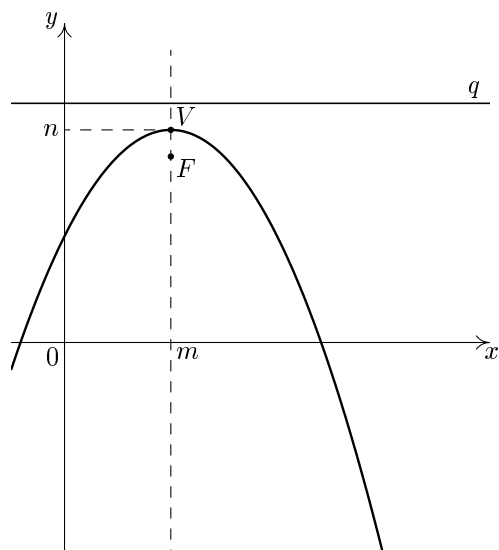
- Parabola s vrcholem $V = [m, n]$, osa je rovnoběžná s osou y



$$(x - m)^2 = 2p \cdot (y - n)$$

$$V = [m, n]$$

$$F = [m, n + \frac{1}{2}p], q: y = n - \frac{1}{2}p$$

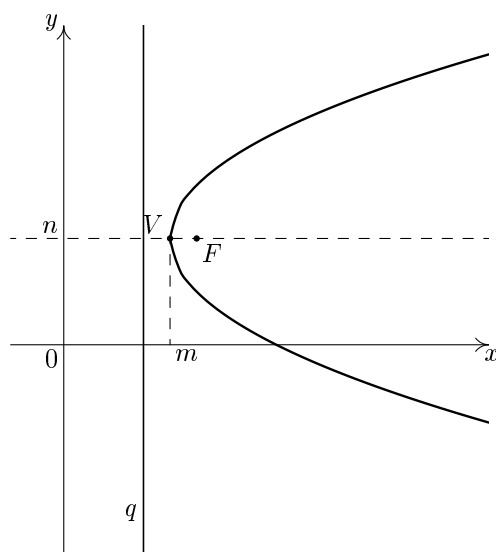


$$(x - m)^2 = -2p \cdot (y - n)$$

$$V = [m, n]$$

$$F = [m, n - \frac{1}{2}p], q: y = n + \frac{1}{2}p$$

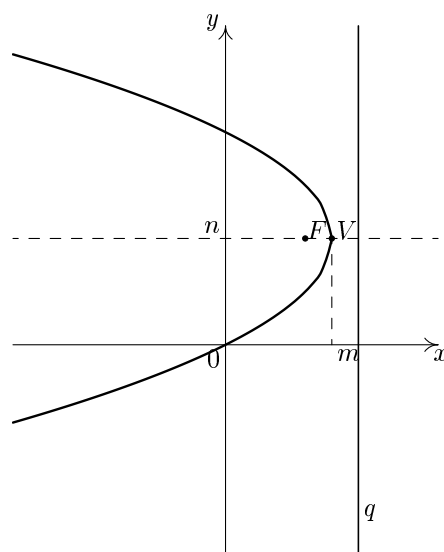
- Parabola s vrcholem $V = [0, 0]$, osa je rovnoběžná s osou x



$$(y - n)^2 = 2p \cdot (x - m)$$

$$V = [m, n]$$

$$F = [m + \frac{1}{2}p, n], q: x = m - \frac{1}{2}p$$



$$(y - n)^2 = -2p \cdot (x - m)$$

$$V = [m, n]$$

$$F = [m - \frac{1}{2}p, n], q: x = m + \frac{1}{2}p$$

Příklad 2. Ukažte, že rovnicí $y^2 - 6x - 4y = 0$ je dána parabola. Určete její charakteristické prvky (souřadnice vrcholu, ohniska, rovnici řídící přímky, parametr), Ukažte dále, že vzdálenost počátku soustavy souřadnic, který je bodem paraboly, od ohniska je stejná jako jeho vzdálenost od řídící přímky.

Vzájemná poloha přímky a paraboly

Zřejmě může mít přímka s parabolou společně právě dva body nebo právě jeden bod nebo nemají žádný společný bod. Přitom každá přímka, která je rovnoběžná s osou paraboly má s parabolou společný právě jeden bod, takové přímce se však tečna k parabole neříká¹⁰. Pod pojmem *tečna paraboly* budeme rozumět takovou přímku, která bude mít s parabolou právě jeden společný bod a nebude procházet žádným vnitřním bodem paraboly.

Tečna paraboly

Zabýváme se (nejprve geometricky) tečnou k parabole. Pro větší názornost mějme danu parabolu, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a má osu totožnou s osou x . Taková parabola má tedy rovnici $x^2 = 2py$, přičemž platí, že ohnisko $F = [0, \frac{p}{2}]$ a řídící přímka q má rovnici $y = -\frac{p}{2}$. Zvolme na parabole libovolný pevný bod $X_0 = [x_0, y_0]$. Označme dále Y_0 patu kolmice k řídící přímce q z bodu X_0 .

Pak platí: Tečna k parabole procházející bodem X_0 je osou úsečky Y_0F .

[Dk.: Poněvadž je bod X_0 bodem paraboly, musí (dle definice paraboly) platit:

$$|X_0F| = |X_0Y_0|$$

takže je trojúhelník X_0Y_0F rovnoramenný se základnou Y_0F . Označme t osu základny Y_0F ^a a zvolme na přímce t nějaký další bod $X \neq X_0$. Označme dále Y patu kolmice vedené na řídící přímku q z bodu X . Protože je bod X bodem osy úsečky Y_0F , musí platit:

$$|XF| = |XY_0|$$

a dále tedy platí:

$$|XF| = |XY_0| > |XY| = v(X, q)$$

takže bod X nemůže ležet na parabole. Dokázali jsme tak, že na přímce t existuje *jediný* bod X_0 , který leží zároveň na parabole, tj. dokázali jsme tak, že přímka t je opravdu tečnou paraboly.]

^anavíc zřejmě leží střed základny Y_0F na ose x

Odvodíme nyní rovnici tečny paraboly v jejím bodě X_0 . Dokázali jsme výše, že je to osa úsečky Y_0F , kde zřejmě je $Y_0 = [x_0, -\frac{p}{2}]$ a $F = [0, \frac{p}{2}]$. Tečna má proto rovnici

$$x_0x - py + d = 0.$$

Hodnotu koeficientu d určíme z podmínky, že tato přímka prochází bodem X_0 , takže musí platit

$$x_0^2 - py_0 + d = 0 \implies d = py_0 - x_0^2 = -py_0 \quad (\text{je totiž } x_0^2 = 2py_0)$$

Tečna t paraboly má proto rovnici:

$$x_0x - py - py_0 = 0$$

nebo-li

$$\boxed{t: x_0x = py + py_0}$$

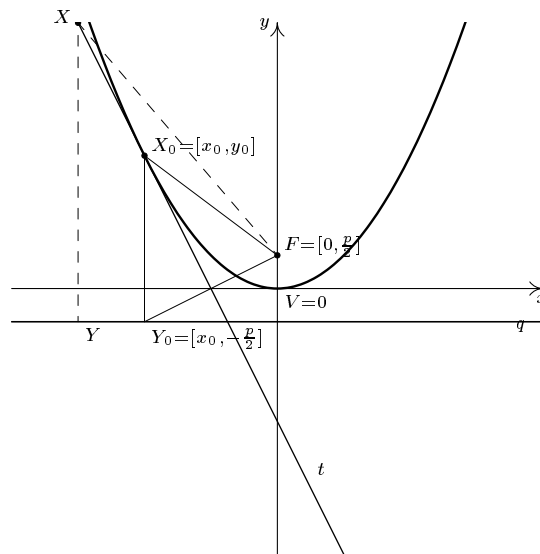
Podobně bychom odvodili, že rovnice tečny t paraboly $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ v jejím bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ je

$$\boxed{t: (x - m) \cdot (x_0 - m) = p(y - n) + p(y_0 - n)}$$

A také: rovnice tečny t paraboly $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ v jejím bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ je

$$\boxed{t: (y - n) \cdot (y_0 - n) = p(x - m) + p(x_0 - m)}$$

¹⁰podobně jako u hyperboly například proto, že takováto přímka prochází i nějakými vnitřními body paraboly.



a podobně pro další tvary rovnic parabol.

Příklad 3. Napište rovnici tečny paraboly s rovnicí $x^2 = 4y$ v jejím bodě $[4, ?]$ a ukažte, že tento bod je jediným společným bodem tečny a paraboly. $[t: 2x - y - 4 = 0]$

Příklad 4. Určete charakteristické prvky paraboly $x^2 + y^2 = (x - c)^2 (c \neq 0)$. Dále napište tečny k této parabole v bodech $A = [\frac{1}{2}c, 0]$ a $B = [0, c]$. $[V = [\frac{1}{2}c, 0], F = [0, 0]. t_1: x = \frac{1}{2}c, t_2: y = -x + c.]$

Příklady.

5. Určete charakteristické prvky paraboly $y = 2x^2$. $[V = [0, 0], F = [0, \frac{1}{8}], [q: y = -\frac{1}{8}]]$
6. Napište rovnici paraboly s ohniskem $F = [2, 1]$ a řídící přímkou $p: x = -4$. Určete její vrchol. $[(y - 1)^2 = 12(x + 1), V = [-1, 1]]$
7. Bodem $M = [2, 2]$ paraboly s rovnicí $y^2 - 6x + 8 = 0$ veďte přímky, které nemají s parabolou žádný další společný bod. $[2y - 3x + 2 = 0, y = 2]$
8. Napište rovnici tečny paraboly, která má rovnici $y^2 - 4y + 12x = 0$, v jejím bodě $O = [0, 0]$. Ukažte, že tato tečna pólí úhel mezi osou x a přímkou OF , kde F je ohnisko paraboly. $[y = 3x, F = [-\frac{8}{3}, 2]]$
9. Najděte tečnu paraboly o rovnici $y^2 - 4y - 6x + 22 = 0$, rovnoběžnou s přímkou $p: y = x$. $[2y = 2x + 1]$
10. Určete p tak, aby se parabola, která má rovnici $y^2 = 2px$, dotýkala přímky $q: y = \frac{x}{2} + 5$. $[p = 5]$
11. Parabola je dána rovnicí $x^2 - 2x - y + 4 = 0$. Které její tečny procházejí počátkem soustavy souřadnic? $[y = 2x, y = -6x]$