

POSLOUPNOSTI A ŘADY – CVIČENÍ

1. Pojem posloupnosti

1. Vypište prvních šest členů posloupnosti dané vzorcem pro n -tý člen a zobrazte je v soustavě souřadnic v rovině:

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{1}{4}n$

b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{4}n$

2. Vypište prvních šest členů posloupnosti dané vzorcem pro n -tý člen:

a) $(3n)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$

e) $((2^n + (-2)^n))_{n=1}^{\infty}$

f) $((1^n + (-1)^n) \cdot n)_{n=1}^{\infty}$

3. Vypište prvních šest členů posloupnosti dané vzorcem pro n -tý člen a zobrazte je v soustavě souřadnic v rovině:

a) $(\cos \frac{1}{2}n\pi)_{n=1}^{\infty}$

b) $(3 \sin \frac{1}{3}n\pi)_{n=1}^{\infty}$

4. Napište prvních deset členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána takto: Je-li n dělitelné třemi, pak je $a_n = 3$; není-li n dělitelné třemi, je $a_n = n$.

5. Posloupnost (b_n) je definována takto: Je-li n prvočíslo, je $b_n = 1$; není-li n prvočíslo, je $b_n = 0$. Určete $b_1, b_7, b_{11}, b_{15}, b_{19}, b_{21}, b_{89}, b_{99}, b_{101}, b_{2001}$.

6. Zjistěte, která z čísel $-12, 65, -242$ jsou členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n = -5n + 8$.

7. Určete vzorcem pro n -tý člen tyto konečné posloupnosti:

a) $3, 3, 3, 3, 3, 3$

b) $-3, -3, -3, -3, -3, -3, -3$

c) $3, -3, 3, -3, 3$

d) $-3, 3, -3, 3, -3$

8. Vyjádřete dané konečné posloupnosti pomocí vzorce pro n -tý člen:

a) $2, 4, 8, 16, 32$

b) $-2, -4, -8, -16, -32$

c) $2, -4, 8, -16, 32$

d) $-2, 4, -8, 16, -32$

9. Vyjádřete dané konečné posloupnosti pomocí vzorce pro n -tý člen:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$

d) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$

10. Vyjádřete dané konečné posloupnosti pomocí vzorce pro n -tý člen:

a) $1 \cdot 2, 2 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4, 5 \cdot 2^5$

b) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{-2}{2 \cdot 3}, \frac{3}{3 \cdot 4}, \frac{-4}{4 \cdot 5}, \frac{5}{5 \cdot 6}$

d) $1, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{5\sqrt{5}}, \frac{-1}{6\sqrt{6}}$

11. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tvoří všechna vzestupně uspořádaná přirozená čísla, jejichž nejmenší nezáporný zbytek při dělení číslem 4 je 1.

a) Vypište prvních pět členů této posloupnosti.

b) Rozhodněte, která z čísel 325, 392, 421 jsou členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

c) Kolikátým členem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číslo 2333?

d) Zapište posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pomocí vzorce pro n -tý člen.

12. Vyjádřete dané nekonečné posloupnosti pomocí vzorce pro n -tý člen. Ve všech případech jsou členy posloupnosti uspořádány vzestupně.

a) Posloupnost, kterou tvoří všechna sudá přirozená čísla.

b) Posloupnost všech přirozených čísel, která jsou dělitelná sedmi.

- c) Posloupnost všech přirozených čísel, která jsou dělitelná číslem tři a zároveň i číslem pět.
d) Posloupnost všech přirozených čísel, jejichž nejmenší nezáporný zbytek při dělení číslem 6 je 4.

13. V nekonečné posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je pro každé sudé číslo n $b_n = 4$, pro každé liché číslo n platí $b_n = 1$. Zapište tuto posloupnost vzorcem pro n -tý člen.

2. Rekurentní určení posloupnosti

14. Vypište prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentně:

- a) $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 1, n \in \mathbb{N}$ b) $a_1 = -2; a_{n+1} = -2 \cdot a_n, n \in \mathbb{N}$
c) $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}$ d) $a_1 = -\frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n^2, n \in \mathbb{N}$

15. Vypište prvních sedm členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentně:

- a) $a_1 = 1, a_2 = 2; a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ b) $a_1 = 1, a_2 = -1; a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}$
c) $a_1 = 1, a_2 = 2; a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 8, n \in \mathbb{N}$ d) $a_1 = 5; a_n \cdot a_{n+1} = n, n \in \mathbb{N}$

16. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = -5 + 3n$. Vyjádřete ji rekurentně dvojím způsobem:

- a) Pomocí a_1 a vztahu mezi a_{n+1} a a_n ,
b) Pomocí a_1, a_2 a vztahu mezi a_{n+2} a a_n .

17. Vyjádřete rekurentně posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = 1^n + (-1)^n$.

18. Ověřte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n \cdot 3^n$, lze vyjádřit rekurentně například takto:

$$a_1 = 3; a_{n+1} = \frac{3 \cdot (n+1)}{n} \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

19. Posloupnosti vyjádřené vzorcem pro n -tý člen vyjádřete rekurentně:

- a) $(n+2)_{n=1}^{\infty}$ b) $(n-2)_{n=1}^{\infty}$ c) $(2n)_{n=1}^{\infty}$
d) $((-1)^n \cdot 2)_{n=1}^{\infty}$ e) $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ f) $(n \cdot 2^n)_{n=1}^{\infty}$
g) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ h) $\left(\frac{n^2}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

20. Posloupnost $(\cos(\frac{1}{2}\pi n))_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

21. Určete první člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí: $a_4 = 2,5; a_5 = 6,4$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+2} = 2 \cdot \frac{a_n}{a(n+1)}$.

22. Dané posloupnosti jsou určeny rekurentně. Vyjádřete je vzorcem pro n -tý člen:

- a) $a_1 = 2; a_{n+1} = 3a_n, n \in \mathbb{N}$ b) $a_1 = 0; a_{n+1} = 3 + a_n, n \in \mathbb{N}$
c) $a_1 = 0; a_{n+1} = 2 - a_n, n \in \mathbb{N}$ d) $a_1 = 0,5; a_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot a_n, n \in \mathbb{N}$

3. Některé vlastnosti posloupností

23. Je dána posloupnost $(0,1 \cdot n^2)_{n=1}^{\infty}$.

- a) Vypište prvních šest členů této posloupnosti.
b) Znázorněte je v soustavě souřadnic v rovině.
c) Rozhodněte, zda je daná posloupnost rostoucí, nebo klesající. Své tvrzení zdůvodněte.

24. Dokažte, že posloupnost $\left(\frac{1}{3n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

25. Dokažte, že posloupnost $\left(\sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

26. Dokažte, že posloupnost $\left((-1)^n \cdot n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ není rostoucí ani klesající.

27. Rozhodněte, které z posloupností jsou rostoucí, resp. klesající. Svá tvrzení zdůvodněte:

- a) $(3n - 15)_{n=1}^{\infty}$ b) $(15 - 3n)_{n=1}^{\infty}$ c) $((-0,1)^n)_{n=1}^{\infty}$
d) $(|2 - n|)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\frac{1-3n}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$

28. Zjistěte, které z dále uvedených posloupností jsou monotónní:

- a) $\left(\frac{n-1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{2n^2+5}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $(n^2 - 2n - 1)_{n=1}^{\infty}$
d) $(n^2 - 4n + 3)_{n=1}^{\infty}$ e) $(\log_{3n} 1)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

29. Zjistěte, které z dále uvedených posloupností jsou shora omezené; zdola omezené; omezené:

- a) $(4)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{1^n + (-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $([1^n + (-1)^n] \cdot n)_{n=1}^{\infty}$
d) $\left(\frac{2n^2+5}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{2n^2+5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$
g) $(0,4^n)_{n=1}^{\infty}$ h) $(\cos 2\pi n)_{n=1}^{\infty}$

4. Aritmetická posloupnost

30. Zapište prvních pět členů aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je 5 a difference je -2 . Znázorněte je v soustavě souřadnic v rovině.

31. Vypište prvních šest členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

- a) $a_1 = 2, d = 2$ b) $a_1 = -1, d = 3$
c) $a_1 = -0,5, d = -1,5$ d) $a_1 = \sqrt{2}, d = 0$

Znázorněte je v soustavě souřadnic v rovině.

32. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_1 = 4, a_7 = -8$. Určete diferenci této posloupnosti a člen a_{12} .

33. V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $a_4 = 2,5, a_9 = 0$. Určete d a a_1 .

34. Vypište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

- a) $a_3 = 8, d = -3$ b) $a_8 = -12, a_9 = -16$
c) $a_1 = 4, a_{10} = 58$ d) $a_6 = 17, a_{11} = -3$

35. Určete diferenci aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

- a) $a_1 = 3, a_{15} = -18$ b) $a_4 = -6, a_8 = -30$

36. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

- a) $a_1 + a_6 = 39, a_{10} - a_4 = 18$ b) $a_4 + a_9 = 4, a_{12} + a_5 = -1,6$
c) $a_1 + a_3 = 0, a_3 + a_5 = 0$ b) $a_2 + a_3 = 17, a_2 \cdot a_3 = 60$

37. Čísla 15 a 39 jsou desátým a devatenáctým členem aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- a) Zapište posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vzorcem pro n -tý člen.
b) Vypočítejte $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{18}$.

38. Vypočítejte součet prvních dvaceti členů aritmetické posloupnosti $(n+3)_{n=1}^{\infty}$.

39. Vypočítejte součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

a) $a_1 = -3, d = 3$

b) $a_1 = 5, a_2 = 2$

c) $a_n = 2n - 2$

b) $a_n = -3n + 1$

40. Určete součet prvních k členů aritmetické posloupnosti $(-n + 4)_{n=1}^{\infty}$.

41. Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi.

42. Vypočítejte součet všech trojčiferných přirozených čísel dělitelných pěti.

43. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je pro každé $n \in \mathbb{N}$ roven $n \cdot (5 - n)$. Vypočítejte první člen této posloupnosti a její diferenci.

44. Velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku tvoří tři po sobě následující členy jisté aritmetické posloupnosti. Určete velikost jednoho z nich.

45. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti, délka delší odvěsny je 4,8 dm. Vypočítejte délky zbývajících stran trojúhelníku.

5. Geometrická posloupnost

46. Zapište prvních pět členů geometrické posloupnosti, jejíž první člen je 8 a kvocient je $-0,5$. Znázorněte je v soustavě souřadnic v rovině.

47. Vypište prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 = 0,2, q = 2$

b) $a_1 = -10, q = 0,5$

c) $a_1 = -3,5, q = 1$

d) $a_1 = -3,5, q = -1$

Znázorněte je v soustavě souřadnic v rovině.

48. V geometrické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $b_1 = 2, a_6 = -488$. Určete kvocient této posloupnosti a členy b_2, b_3, b_4 a b_5 .

49. V geometrické posloupnosti $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $c_3 = -\frac{3}{16}, c_6 = 12$. Určete q a c_1 .

50. Vypište prvních pět členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_3 = 16, q = -2$

b) $a_6 = 0,5, a_7 = 0,25$

c) $a_1 = -1, a_{10} = 512$

d) $a_5 = 1\,024, a_{11} = 4\,194\,304$

51. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 + a_2 = 4, a_4 - a_2 = 24$

b) $a_1 + a_4 = 14, a_3 + a_2 = -4$

c) $a_1 + a_3 = 2, a_2 + a_4 = 2$

b) $a_2 + a_3 = 0, a_1 + a_3 = 2$

52. Které z následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou aritmetické a které jsou geometrické? Zdůvodněte svá tvrzení:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2, n \in \mathbb{N}$

b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n \cdot 2, n \in \mathbb{N}$

c) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

d) $(2^n)_{n=1}^{\infty}$

e) $(n^2)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(\frac{5+4n}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$

53. Číslo 12 a $-\frac{4}{81}$ jsou druhým a sedmým členem geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

a) Vypočítejte první člen této posloupnosti a její kvocient.

b) Zapište posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurentním vztahem.

c) Zapište posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vzorcem pro n -tý člen.

d) Vypočítejte a_3, a_4, a_5, a_6 .

54. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána svým prvním členem $a_1 = 2,5$ a kvocientem $q = -2$. Vytvořme posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takto: pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = |a_n|$.

a) Je posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ také geometrická? Zdůvodněte svůj závěr.

b) Čemu je roven kvocient posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$?

55. Vypočítejte součet prvních osmi členů geometrické posloupnosti $(0,5 \cdot (-2)^n)_{n=1}^{\infty}$.

56. Vypočítejte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $a_1 = -8, q = 1$

b) $a_1 = 6, q = -1$

c) $a_1 = 2, q = -2$

b) $a_1 = 16, a_2 = -4$

57. O kvádru, který má délky hran a m, b m, c m, máme tyto informace:

1. a, b, c jsou přirozená čísla.

2. a, b, c tvoří po sobě následující členy geometrické posloupnosti.

3. Součet délek všech hran kvádru je 56 m.

4. Objem kvádru je 64 m^3 .

Určete z těchto údajů délky hran kvádru.

58. Vkladatel uložil na počátku roku do banky 15 000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s roční úrokovou mírou 9 %. Úrokovací období je jeden rok. Jakou celkovou částku bude mít na termínovaném vkladu na konci roku?

59. Vkladatel uložil na termínovaný vklad na jeden měsíc částku 50 000 Kč, roční úroková míra je 8,75 %. Jak vysoká částka mu bude po jednom měsíci vyplacena?

60. Vkladatel uložil na počátku roku na termínovaný vklad na dva roky částku 32 000 Kč. Roční úroková míra je 9,5 %. Jak vysokou částku bude mít na konci druhého roku, jestliže si v průběhu celé doby nevybíral úroky a je-li úrokovací období

a) 1 rok

b) polovina roku

c) čtvrt roku

b) 1 měsíc

61. Vkladatel uložil do banky dne 1. 2. 2010 částku 150 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 3 %, úrokovací období je jeden rok. Kolik korun obdržel od banky při výběru celého vkladu i s úroky dne 1. 2. 2012?

6. Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

62. Rozhodněte, zda platí věta: Pro každé $d \in \mathbb{R}$ je aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d buď rostoucí, nebo klesající.

63. Uveďte, které z dále uvedených aritmetických posloupností jsou rostoucí, klesající; nejsou ani rostoucí, ani klesající:

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3, n \in \mathbb{N}$

b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $b_1 = -2, b_{n+1} = b_n + 3, n \in \mathbb{N}$

c) $(0,5n - 1,5)_{n=1}^{\infty}$

d) $(-16)_{n=1}^{\infty}$

64. Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro která aritmetická posloupnost $(an + 3)_{n=1}^{\infty}$

a) je rostoucí

b) je klesající

c) není ani rostoucí, ani klesající.

65. Rozhodněte, které z dále uvedených vět o aritmetických posloupnostech platí. Své závěry zdůvodněte.

a) Neexistuje aritmetická posloupnost, která je omezená.

b) Je-li aritmetická posloupnost klesající, pak není zdola omezená.

c) Je-li aritmetická posloupnost shora omezená, pak je rostoucí.

66. Je dána aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = 2n - 19$. Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která platí:

- a) $a_n \leq 1$ b) $a_n \leq 100$ c) $a_n \geq 1\,000$ d) $a_n > 10^6$

67. Je dána aritmetická posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$, $a_n = -2n + 5$. Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která platí:

- a) $b_n \geq 10$ b) $b_n > -10$ c) $b_n < -10\,000$ d) $b_n \leq -10^8$

68. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ je $a_1 = -2$, $q = -3$.

a) Vypište prvních pět členů této posloupnosti.

b) Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ rostoucí, nebo klesající; shora omezená, zdola omezená. Své závěry zdůvodněte.

69. Stejně úkoly jako v předešlé úloze řešte pro geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$, jež jsou dány prvním členem a kvocientem:

- a) $a_1 = 2$, $q = 2$ b) $a_1 = -2$, $q = 0,5$
c) $a_1 = 1$, $q = 0,1$ d) $a_1 = -5$, $q = 3$
e) $a_1 = -0,5$, $q = -1$ f) $a_1 = 0,5$, $q = -0,9$

70. Rozhodněte, které z dále uvedených geometrických posloupností jsou rostoucí, klesající; omezené:

- a) $(2^n)_{n=1}^\infty$ b) $(-2^n)_{n=1}^\infty$ c) $((-1)^n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty$
d) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^\infty$ e) $\left(-\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^\infty$ f) $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^\infty$

71. Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$, $a_n = 4^n$. Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která platí:

- a) $a_n \leq 64$ b) $a_n < 200$ c) $a_n > 1\,000$ d) $a_n \geq 10^9$

72. Je dána geometrická posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$, $b_n = 0,25^n$. Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která platí:

- a) $b_n < 0,01$ b) $b_n < 0,001$ c) $b_n < 10^{-5}$ d) $b_n < 10^{-10}$

VÝSLEDKY

1. a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$; b) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 1, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$. **2.** a) 3, 6, 9, 12, 15, 18; b) 2, 2, $\frac{8}{3}, 4, \frac{32}{5}, \frac{32}{2}$; c) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$; d) -2, 4, -8, 16, -32, 64; e) 0, 8, 0, 32, 0, 128; f) 0, 4, 0, 8, 0, 12. **3.** a) 0, -1, 0, 1, 0, -1; b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 0. **4.** 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8, 3, 10. **5.** $b_1 = 0, b_7 = 1, b_{11} = 1, b_{15} = 0, b_{19} = 1, b_{21} = 0, b_{89} = 1, b_{99} = 0, b_{101} = 1, b_{2001} = 0$. **6.** -12 ano, 65 ne, -242 ano. **7.** a) $(3)_{n=1}^\infty$; b) $(-3)_{n=1}^\infty$; c) $((-1)^{n+1} \cdot 3)_{n=1}^\infty$; d) $((-1)^n \cdot 3)_{n=1}^\infty$. **8.** a) $(2^n)_{n=1}^\infty$; b) $(-2^n)_{n=1}^\infty$; c) $(-(-2)^n)_{n=1}^\infty$; d) $((-2)^n)_{n=1}^\infty$. **9.** a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$; b) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^\infty$; c) $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^\infty$; d) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^\infty$; **10.** a) $(n \cdot 2^n)_{n=1}^\infty$; b) $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$; c) $\left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n \cdot (n+1)}\right)_{n=1}^\infty$; d) $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt{n}}\right)_{n=1}^\infty$. **11.** a) 1, 5, 9, 13, 17; b) 325, 421; c) 584. člen; d) $(4(n-1) + 1)_{n=1}^\infty$ čili $(4n-3)_{n=1}^\infty$. **12.** a) $(2n)_{n=1}^\infty$; b) $(7n)_{n=1}^\infty$; c) $(15n)_{n=1}^\infty$; d) $(6(n-1) + 4)_{n=1}^\infty$ čili $(6n-2)_{n=1}^\infty$. **13.** $(b_n)_{n=1}^\infty$, $b_n = 2,5 + (-1)^n \cdot 1,5$. **14.** a) 2, 3, 4, 5, 6, 7; b) -2, 4, -8, 16, -32, 64; c) $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$; d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \frac{1}{65\,536}, \frac{1}{4\,294\,967\,296}$. **15.** a) 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169; b) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1; c) 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1; d) 5, $\frac{1}{5}, 10, \frac{3}{10}, \frac{40}{3}, \frac{3}{8}, 16$. **16.** a) $a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 3, n \in \mathbb{N}$; b) $a_1 = -2, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + 6, n \in \mathbb{N}$. **17.** $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} \cdot 2, n \in \mathbb{N}$. **18.** $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3} = \frac{(n+1) \cdot 3}{n}$,
odtud $a_{n+1} = \frac{3 \cdot (n+1)}{n} \cdot a_n$. **19.** Například: a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 1, n \in \mathbb{N}$; b) $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 1, n \in \mathbb{N}$; c) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2, n \in \mathbb{N}$; d) $a_1 = -2, a_{n+1} = -a_n, n \in \mathbb{N}$; e) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 \cdot a_n, n \in \mathbb{N}$;
f) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot 2a_n, n \in \mathbb{N}$; g) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot 2a_n, n \in \mathbb{N}$; h) $a_1 = 0,5, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot 0,5a_n, n \in \mathbb{N}$. **20.** $a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_{n+4} = a_n, n \in \mathbb{N}$. **21.** $a_1 = 40, [a_3 = 8, a_2 = 10]$. **22.** a) $(a_n)_{n=1}^\infty$,
 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ čili $(2 \cdot 3^{n-1})_{n=1}^\infty$; b) $(3(n-1))_{n=1}^\infty$; c) $(1 + (-1)^n)_{n=1}^\infty$; d) $\left(\frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)_{n=1}^\infty$. **23.** a) 0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5; 3,6; c) rostoucí. **24.** Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{3n^3} > \frac{1}{3(n+1)^3}$, neboť $3(n+1)^3 > 3n^2$. **25.** Pro každé $n \in \mathbb{N}$

je $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, neboť $n < n+1$. **26.** Je zřejmé například z výpisu prvních tří členů posloupnosti: $-1, 4, -9$. **27.** a) rostoucí; [Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $3n-15 < 3(n+1)-15$.] b) klesající; [Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $15-3n > 15-3(n+1)$; c) není rostoucí, ani klesající; d) není rostoucí, ani klesající; e) rostoucí; [Dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{2n}{2n+1} < \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$; f) klesající; [Dokážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1-3n}{2n} < \frac{1-3(n+1)}{2(n+1)}$.] **28.** a) Ano, je rostoucí, a tedy i neklesající; b) ano, je klesající, a tedy i nerostoucí; c) ano, je rostoucí, a tedy i neklesající; d) ne; $0, -1, 0, \dots$; e) ano, je nerostoucí i neklesající; [Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\log_{3n} 1 = 0$.] f) ne; $\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \dots$. **29.** a) Omezená; b) omezená; c) je zdola omezená, není shora omezená; d) omezená; e) je zdola omezená, není shora omezená; f) omezená; g) omezená; h) omezená. **30.** $5, 3, 1, -1, -3$. **31.** a) $2, 4, 6, 8, 10, 12$; b) $-1, 2, 5, 8, 11, 14$; c) $-0,5, -2, -3,5, -5, -6,5, -8$; d) $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$. **32.** $d = -2, a_{12} = -18$. **33.** $d = -0,5, a_1 = 4$. **34.** a) $14, 11, 8, 5, 2$; b) $16, 12, 8, 4, 0$; c) $4, 10, 16, 22, 28$; d) $37, 33, 29, 25, 21$. **35.** a) $-1,5$; b) -6 . **36.** a) $a_1 = 12, d = 3$; [$a_1 + a_6 = 2a_1 + 5d, a_{10} - a_4 = 6d$.] b) $a_1 = 9,7, d = -1,4$; c) $a_1 = 0, d = 0$; d) dvě řešení: $a_1 = -2, d = 7$; $a_1 = 19, d = -7$. [Řešíme kvadratickou rovnici $a_3^2 - 17a_3 + 60 = 0$.] **37.** a) $(a_n)_{n=1}^\infty, a_n = \frac{8}{3}n - \frac{35}{3}$; b) $17\frac{2}{3}, 20\frac{1}{3}, 23, 25\frac{2}{3}, 28\frac{1}{3}, 31, 33\frac{2}{3}, 36\frac{1}{3}$. **38.** 270. **39.** a) 105; b) -85 ; c) 90; d) -155 . **40.** $\frac{1}{2}k \cdot (-k+7)$. **41.** 1 188. [$a_1 = 12, a_n = 96, d = 4$; n vypočítáme ze vztahu $a_n = a_1 + (n-1)d$.] **42.** 98 550. [$a_1 = 100, a_n = 995, d = 5$; n vypočítáme ze vztahu $a_n = a_1 + (n-1)d$.] **43.** $a_1 = 4, d = -2$. [$s_1 = 1 \cdot (5-1) = 4 = a_1, s_2 = 2 \cdot (5-2) = 6 = a_1 + a_2$.] **44.** $\frac{1}{3}\pi$. [$(a-d+a+(a+d) = \pi)$.] **45.** 3,6 dm; 6 dm. [Řešíme rovnici $(4,8-d)^2 + 4,8^2 = (4,8+d)^2$ s neznámou $d \in \mathbb{R}$.] **46.** 8; -4 ; 2; -1 ; 0,5. **47.** a) 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4. b) -10 ; -5 ; $-2,5$; $-1,25$; $-0,625$; $-0,3125$; c) $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; d) $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$; $-3,5$. **48.** $q = -3, b_2 = -6, b_3 = 18, b_4 = -54, b_5 = 162$. **49.** $q = -4, c_1 = -\frac{3}{256}$. **50.** a) 4, $-8, 16, -32, 64$; b) 16, 8, 4, 2, 1; c) $-1, 2, -4, 8, -16$; d) dvě možnosti: 4, 16, 64, 256, 1 024; 4, $-16, 64, -256, 1 024$. **51.** a) Dvě možnosti: $a_1 = 1, q = 3$; $a_1 = -4, q = -2$; b) dvě možnosti: $a_1 = 16, q = -0,5$; $a_1 = -2, q = -2$; c) $a_1 = 1, q = 1$; d) dvě možnosti: $a_1 = 2, q = 0$; $a_1 = 1, q = -1$. **52.** a) Aritmetická ($d = 2$); b) geometrická ($q = 2$); c) není ani aritmetická, ani geometrická (je vidět z prvních tří členů 2, 1, $\frac{1}{3}$); d) geometrická ($a_1 = 2, q = 2$); e) není ani aritmetická, ani geometrická (je vidět z prvních tří členů 1, 4, 9, $\dots$); f) aritmetická ($\frac{5+4n}{3} = 3 + (n-1) \cdot \frac{4}{3}$). **53.** a) $a_1 = -36, q = -\frac{1}{3}$; b) $a_1 = -36, a_{n+1} = (-\frac{1}{3}) \cdot a_n, n \in \mathbb{N}$; c) $a_n = 108 \cdot (-\frac{1}{3})^n$; d) $-4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{27}$. **54.** a) Ano; [$b_n = |a_n| = |a_1 q^{n-1}| = |a_1| \cdot |q^{n-1}| = |a_1| \cdot |q|^{n-1}$.] b) $|q|$. **55.** 85. **56.** a) -80 ; b) 0; c) -682 ; d) $\frac{209\,715}{16\,384}$. **57.** 2 m, 4 m, 8 m. **58.** 16 147,50 Kč. (Jde již o částku po zdanění.) **59.** 50 309,90 Kč. **60.** a) 37 376,70 Kč; [$32\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot \frac{9,5}{100})^2$.] b) 37 489,50 Kč; [$32\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot \frac{9,5}{100} \cdot \frac{1}{2})^4$.] c) 37 548,30 Kč; [$32\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot \frac{9,5}{100} \cdot \frac{1}{4})^8$.] d) 37 588,40 Kč. [$32\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot \frac{9,5}{100} \cdot \frac{1}{12})^{24}$.] **62.** Neplatí; aritmetická posloupnost s diferencí $d = 0$ není ani rostoucí, ani klesající. **63.** a) Klesající; b) rostoucí; c) rostoucí; d) není ani rostoucí, ani klesající. **64.** a) $a > 0$; b) $a < 0$; c) $a = 0$. **65.** Neplatí; aritmetická posloupnost s diferencí $d = 0$ je omezená; b) platí; c) neplatí, například $(-1)_{n=1}^\infty, (-n)_{n=1}^\infty$. **66.** a) $n \leq 10$; b) $n \leq 59$; c) $n \geq 510$; d) $n > 500\,009$. **67.** a) Neexistuje takové $n \in \mathbb{N}$; b) $n < 8$; c) $n > 5\,002$; d) $n \geq 0,5 \cdot 10^8 + 3$. **68.** a) $-2, 6, -18, 54, -162$; b) není rostoucí ani klesající, není shora omezená ani zdola omezená. **69.** a) Je rostoucí, je zdola omezená, není shora omezená; b) je rostoucí, je omezená; c) je klesající, je omezená; d) je klesající, je shora omezená, není zdola omezená; e) není rostoucí ani klesající, je omezená; f) není rostoucí ani klesající, je omezená. **70.** a) Je rostoucí, není omezená; b) je klesající, není omezená; c) není rostoucí ani klesající, není omezená; d) je klesající, je omezená; e) je rostoucí, je omezená; f) není rostoucí ani klesající, je omezená. **71.** a) $n \leq 3$; b) $n < 4$; [Řešíme nerovnici $4^n < 200$: $n \cdot \log 4 < \log 200, n < \frac{\log 200}{\log 4}$.] c) $n > 4$; d) $n \geq 15$. **72.** a) $n > 3$; [Řešíme nerovnici $0,25^n < 0,01$: $n \cdot \log 0,25 < \log 0,01, n > \frac{\log 0,01}{\log 0,25}$.] b) $n > 4$; c) $n > 8$; d) $n > 16$.